PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 20/21. 1. November 1914. Redaktionsschluß für No. 22 am 14. November 1914. 15. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

W. Voigt u. P. Scherrer, Über einen von den Herren Zeeman und Winawer beschriebenen merkwürdigen magneto-optischen Absorptions-Effekt. S. 865.

J. W. Woodrow, Versuche über die Erzeugung und Messung hochgradiger Vakua. S. 868.

W. Schottky, Über den Einfluß von Strukturwirkungen, besonders der Thomsonschen Bildkraft auf die Elektronenemission der Metalle. S. 872.

D. Hilbert, Zur Begründung der elementaren Strahlungstheorie. III. S. 878.

M. K. Grober, Ein Beispiel für die Kirchhoffschen Stabgleichungen. S. 889.

E. Paulson, Ein System von Wellenzahlen im Scandiumspektrum. S. 892.

A. van den Broek, Röntgenstrahlung und Ordnungszahlen. S. 894.

B. Winawer und F. Pfeiffer, Gleitfunken-Beobachtung an Röntgenröhren. S. 895.

Besprechungen:

F. Seemann, Leitfaden der mineralogischen Bodenanalyse. S. 897.

B. Gossner, Kristallberechnung und Kristallzeichnung. S. 898.

E. A. Wülfing, Die 32 kristallographischen Symmetrieklassen und ihre einfachen Formen. S. 898.

W. Scheffer, Wirkungsweise und Gebrauch des Mikroskops. S. 898.

H. v. Sanden, Praktische Analysis. S. 898.

A. v. Weinberg, Kinetische Stereochemie der Kohlenstoffverbindungen. S. 899.

Berichtigung. S. 899.

Personalien. S. 899.

Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1914/15. S. 899.

Angebote. S. 900.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über einen von den Herren Zeeman und Winawer beschriebenen merkwürdigen magneto-optischen Absorptions-Effekt.

Von W. Voigt und P. Scherrer.

(Mitgeteilt von W. Voigt.)

1. Die Herren Zeeman und Winawer[1]) haben vor einiger Zeit eine sehr auffallende Erscheinung beschrieben, deren Beobachtung, wie es scheint, von anderer Seite nicht wiederholt worden ist, die aber wegen ihrer anscheinenden Unerklärbarkeit aus theoretischen Gesichtspunkten mannigfach Interesse erweckt hat[2]). Die genannten Forscher untersuchten an einer *Na*-Flamme den inversen Zeeman-Effekt der *D*-Linien in sehr wenig gegen die Kraftlinien geneigten Richtungen. Ließen sie in die *Na*-Flamme zirkular polarisiertes Licht einfallen oder beobachteten sie mit einer Vorrichtung, die nur solches passieren ließ, so nahmen sie im allgemeinen nur den der longitudinalen Fortpflanzung entsprechenden Absorptionsstreifen auf der einen Seite der feldlosen Linie wahr. Bei Verwendung sehr dichten Dampfes aber tauchte auf der anderen Seite ein weiterer feiner Absorptionsstreifen auf, der sich als merklich unpolarisiert erwies. Im Falle der D_1-Linie konnte durch Messung konstatiert werden, daß dieser Streifen den Ort der auf jener Seite gelegenen *p*-Komponente einnahm, bei der D_2-Linie war eine hinreichend genaue Messung nicht möglich. Ob auf der anderen Seite die entsprechende Linie entstände, ließ sich nicht nachweisen, da der betreffende Ort von dem verbreiterten zirkulären Streifen überschattet war. Schließlich gelang es den Beobachtern die neue Linie auch dann zu erhalten, wenn die Fortpflanzungsrichtung völlig mit der Achse des Feldes zusammenfiel.

Wegen der Schwierigkeit einer Deutung der bez. Erscheinung aus der Theorie sprach ich sofort nach der Kenntnisnahme brieflich die Vermutung aus, dieselbe könnte vielleicht sekundärer Herkunft sein, nämlich auf der Inhomogenität der benutzten Felder beruhen. Ich möchte diesen Gedanken hier näher auseinandersetzen und im Anschluß daran über einige Beobachtungen berichten, die ich zur Prüfung derselben veranlaßt habe.

Die Herren Zeeman und Winawer benutzten nach ihrer Publikation zunächst Pol-

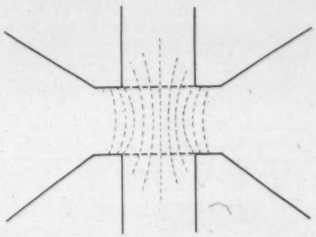

Fig. 1.

schuhe mit recht beträchtlichen kreisförmigen Bohrungen. Infolge hiervon mußten die Kraftlinien des Feldes einen Verlauf haben, der für

1) P. Zeeman und B. Winawer, Vhdl. Akad. Amst. 1910, S. 233; Amst. Proc. 1910, S. 162; Astrophys. Journ. 32, 329, 1910; diese Zeitschr. 11, 880, 1910. S. auch die Photographie der Erscheinung in P. Zeeman, Researches in Magnetooptics, London 1913, Tafel VIII, Fig. 67.

2) S. z. B. R. Wood, Physical Optics, New York, 1911, S. 519.

jede Meridianebene ungefähr dem in Fig. 1 dargestellten entsprochen haben wird. Licht, welches das Interferrikum parallel der Achse durchsetzt, pflanzte sich somit in gewissen Bereichen merklich geneigt gegen die Kraftlinien fort. Dann konnte wohl die für den transversalen Effekt charakteristische p-Komponente auftauchen und sie mußte wegen der rotatorischen Symmetrie der Feldverteilung bei astigmatischer Abbildung unpolarisiert erscheinen. Eine angenäherte Gleichwertigkeit aller Richtungen wird auch bei der Fortpflanzung in einer wenig gegen die Achse geneigten Richtung übrig bleiben. Daß die Erscheinung nur bei sehr dichtem Dampfe in der Flamme eintrat, und daß die neue Komponente doch fein war, dürfte sich dabei folgendermaßen erklären.

Die Kraftlinien weichen gemäß Fig. 1 von der axialen Richtung besonders in den Teilen des Feldes nahe an den Rändern der Bohrung ab. Hier wirken die Metallmassen der Pole stark abkühlend, und es wird bei allgemein geringer Dampfdichte dort überhaupt keine merkliche Dichte bestehen, bei allgemein größer, nur eine mäßige Dichte. Infolge hiervon werden auch bei starker allgemeiner Dampfdichte die neuen Linien fein bleiben.

Eine wesentliche Schwierigkeit bleibt allerdings noch zu beheben. Für die Erscheinung in transversaler Richtung sind neben den p- auch die s-Komponenten charakteristisch. Warum erscheint also nicht auch eine Andeutung der s-Komponente, welche der auftauchenden p-Komponente benachbart ist?

2. Auskunft über die hier vorliegenden Verhältnisse gibt die allgemeine Theorie des inversen Zeeman-Effektes in gegen das Feld geneigten Richtungen, wie sie von mir und von den Herren Lorentz und Försterling[1]) bearbeitet worden ist. Was uns aus derselben hier zunächst interessiert, ist der Ausdruck für das Verhältnis der komplexen Amplituden normal und parallel zur Meridianebene; die resp. mit $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{P}$ bezeichnet werden mögen. Der Quotient $\mathfrak{N}/\mathfrak{P}$ für eine Beobachtungsrichtung, welche den Winkel ϑ mit den Kraftlinien einschließt, drückt sich relativ einfach aus durch die komplexen Brechungsindizes n, welche der beobachteten Wellenlänge unter gewissen Normalverhältnissen entsprechen. Bezeichnen nämlich n_+ und n_- die Brechungsindizes der $+$ und $-$ rotierenden zirkularen Wellen bei der longitudinalen Fortpflanzung, n_p und n_s die Brechungsindizes der p- und s-Schwingung bei transversaler Fortpflanzung, wobei in hinreichender Annäherung

$$n_s = \frac{1}{2}(n_+ + n_-), \qquad (1)$$

so schreibt sich

$$\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{P}} = i\left|\frac{n_s - n_p}{n_- - n_+}\cdot\frac{\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{n_s - n_p}{n_- - n_+}\cdot\frac{\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta}\right)^2}\right|. \qquad (2)$$

Für kleine Winkel unterscheidet sich also, falls nicht

$$\frac{n_s - n_p}{n_- - n_+}$$

sehr groß ist, $\mathfrak{N}/\mathfrak{P}$ nur um eine Größe zweiter Ordnung von i, ist also die bezügliche Schwingung merklich zirkular polarisiert. Es ist leicht zu zeigen, daß letzteres im Bereich der s-, nicht aber im Bereich der p-Komponente stattfindet.

Um diesen Nachweis zu führen, erinnern wir daran, daß

$$n = n(1 - i\varkappa) = n - ik \qquad (3)$$

ist, wobei n den reellen Brechungsindex bezeichnet und $\varkappa$ resp. k die Absorption mißt. Ferner stellen wir durch eine schematische Fig. 2 den

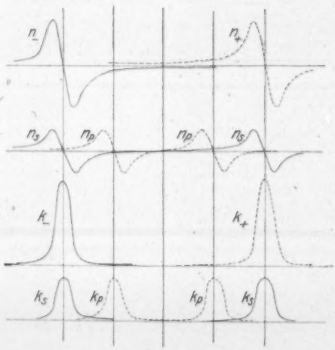

Fig. 2.

bekannten Verlauf von n und k für die $+$ und die $-$, die s- und die p-Welle, dar.

Nun betrachten wir

$$\frac{n_s - n_p}{n_- - n_+} = \frac{(n_s - n_p) - i(k_s - k_p)}{(n_- - n_+) - i(k_- - k_+)} \qquad (4)$$

im Bereiche der p- und der s-Komponenten. Im ersteren Bereiche überwiegt k_p alle übrigen Glieder, ferner ist $n_- - n_+$ groß gegen $(k_- - k_+)$; im p-Bereiche ist also der Quotient groß mit überwiegendem imaginären Teil und die Schwingungsform weicht sonach stark von der zirkularen ab. Einfallendes zirkulares Licht wird somit in dem p-Bereich in zwei Komponenten zerlegt. Im letzteren Bereich ist hingegen der Zähler von

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. 1, 389, 1900; H. A. Lorentz, Amsterd. Proc. 12, 321, 1909; K. Försterling, Gött. Nachr. 1913, 611.

der Größenordnung des doppelten von der des Nenners, der untersuchte Quotient von mäßiger Größe; hier ist also $\mathfrak{N}/\mathfrak{P}$ bis auf Größen 2. Ordnung gleich i. Im s-Bereich pflanzen sich sonach merklich zirkulare Schwingungen fort, eine einfallende zirkulare Schwingung wird sonach beim Durchgang nicht in zwei Komponenten zerlegt.

Ferner ziehen wir den Ausdruck für den komplexen Brechungsindex $\mathfrak{n}$ heran, der einer Richtung ϑ gegen die Kraftlinien entspricht und der in den früheren Größen lautet

$$2\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_s(1+\cos^2\vartheta) + \mathfrak{n}_p \sin^2\vartheta + \sqrt{(\mathfrak{n}_- - \mathfrak{n}_+)^2 \cos^2\vartheta + (\mathfrak{n}_s - \mathfrak{n}_p)^2 \sin^4\vartheta}. \quad (5)$$

Wir wenden denselben gleichfalls auf die Bereiche der p- und der s-Komponenten an, während wir ϑ so klein annehmen, daß $\sin\vartheta$ mit ϑ, $\cos\vartheta$ mit Eins vertauscht werden darf.

Im p-Bereich sind $\mathfrak{n}_+$, $\mathfrak{n}_-$, $\mathfrak{n}_s$ als reell zu betrachten, $\mathfrak{n}_p$ ist $= n_p - i k_p$; hier gilt somit

$$2\mathfrak{n} = 2n_s + (n_p - i k_p)\vartheta^2 + \sqrt{(n_- - n_+)^2 + (n_s - n_p + i k_p)^2 \vartheta^4}; \quad (6)$$

dabei ist das zweite Glied unter dem Wurzelzeichen jedenfalls nicht groß gegen das erste. Daraus folgt, daß für beide Wellen der für die Absorption maßgebende Teil von $2\mathfrak{n}$ von der Größenordnung von $k_p \vartheta^2$ ist.

Im s-Bereiche ist auf der $+$-Seite $\mathfrak{n}_p$ und $\mathfrak{n}_-$ reell, $\mathfrak{n}_s = n_s - i k_s$, $n_+ = n_+ - i k_+$, $k_+ = 2k_s$, also

$$2\mathfrak{n} = 2(n_s - i k_s) + n_p \vartheta^2 + \sqrt{(n_- - n_+ + i k_+)^2 + (n_s - i k_s - n_p)^2 \vartheta^4}. \quad (7)$$

Die beiden Klammerausdrücke sind von gleicher Ordnung, demgemäß ist das zweite Glied sehr klein gegen das erste. Hieraus folgt, daß man schreiben kann

$$2\mathfrak{n} = 2(n_s - i k_s) + n_p \vartheta^2 + (n_- - n_+ + i k_+)\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{n_s - i k_s - n_p}{n_- - n_+ + i k_+}\vartheta^2\right)^2\right\}. \quad (8)$$

Für das obere Vorzeichen erhält man sonach das für die Absorption maßgebende imaginäre Glied rechts von der Ordnung $2k_+$, für das untere wird es von der Ordnung $\frac{1}{4} k_+ \vartheta^4$. Die eine Welle wird also merklich ebenso absorbiert wie bei rein longitudinaler Fortpflanzung, die andere ganz außerordentlich wenig.

In den vorstehenden Entwicklungen ist nun der Grund erkennbar gemacht, warum bei wenig gegen die Kraftlinien geneigten Beobachtungsrichtungen zwar die p-, aber nicht die s-Komponente des transversalen Effektes auftauchen. Einfallendes zirkular polarisiertes Licht wird im Bereich der s-Komponenten nicht merklich in Komponenten zerlegt; es pflanzt sich unzerlegt fort und wird auf der einen Seite der feldlosen Linie überaus stark absorbiert (was den breiten Absorptionsstreifen liefert), auf der anderen aber unmerklich, viel weniger, wie die Absorption im p-Bereiche ergibt.

Fällt natürliches Licht ein und wird mit einem zirkularem Analysator beobachtet, so gelten dieselben Resultate.

3. Die Anordnung, welche Herr Scherrer bei den Beobachtungen anwandte, war die bei Untersuchung des inversen Zeeman-Effekts übliche. Das natürliche weiße Licht des positiven Kraters einer Bogenlampe passierte als schwach konvergentes Bündel die durchbohrten Pole eines großen Du Bois-Elektromagneten. Zwischen den Polschuhen befand sich die Na-Flamme. Da diese sehr dicht sein mußte, wurde eine Knallgasgebläseflamme (Linnemannbrenner) benutzt, die dadurch mit Natrium beschickt wurde, daß man darin ein dünnes Stäbchen leicht schmelzbaren Natronglases verdampfte. Nachdem das Licht einen Zirkularanalysator $\left(\frac{\lambda}{4}\text{-Platte oder Fresnelsches Rhomboeder} + \text{Nicol}\right)$ passiert hatte, fiel es auf den Spalt eines großen stigmatischen Gitterspektrographen[1]). Der Zirkularanalysator läßt zirkulares Licht nur einer Umlaufrichtung passieren. Wird z. B. nur links zirkular polarisiertes Licht durchgelassen, so tritt bei eingeschaltetem Magnetfeld von dem D_1-Duplett nur die Komponente kleinerer Frequenz auf, vom D_2-Quadruplett erscheinen analog nur die zwei gegen Rot zu liegenden Komponenten. Es ist bei dieser Untersuchung unbedingt nötig, die einen Komponenten auszulöschen, weil sonst die feinen zu beobachtenden Absorptionsstreifen neben den durch große Dampfdichte sehr verbreiterten normalen Streifen gar nicht wahrgenommen werden können.

Um nun ähnliche Verhältnisse zu erzielen, wie sie bei den ersten Beobachtungen der Herren Zeeman und Winawer vorlagen, wurden zuerst Polschuhe mit runder Bohrung von 7 mm Öffnung angewandt, bei denen Außen- und Innenfläche in einer scharfen Schneide zusammentrafen (Fig. 3). Bei dieser Anordnung traten die neuen Komponenten immer nur in Form von zwei Zipfeln auf, die sich niemals zu einer ununterbrochenen Linie zusammenschlossen (Fig. 4). Der stigmatischen Abbildung zufolge, welche das benutzte Spektroskop liefert, müssen diese Zipfel von Strahlen

1) W. Voigt und H. Hansen, Diese Zeitschr. 13, 217, 1912.

herrühren, die nahe dem schneidenartigen Rande der Polschuhe vorbeigingen, und da das Feld, nach Fig. 1, dort wesentlich inhomogener war, als in der Mitte, wäre das Auftreten einer solchen zweiteiligen Linie zu verstehen.

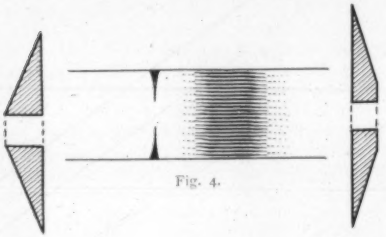

Fig. 4.

Fig. 3.

Fig. 5.

Hierauf wurden Versuche mit rund gebohrten Polschuhen gemacht, denen vorn eine ebene Fläche angeschliffen war (Fig. 5). Bei dieser Anordnung konnten die fraglichen Komponenten am besten beobachtet werden. Sie traten bei den verschiedensten Feldstärken und Polabständen äußerst deutlich und intensiv auf. Das Feld scheint bei diesen Polschuhen besonders inhomogen zu sein, wie dies auch aus den Photographien von Corbino[1]) hervorgeht.

Da die Lichtstrahlen leicht konvergent durch das Interferrikum gingen, ist es verständlich, daß hier so gut wie alle streckenweise schief gegen die Kraftlinien verliefen und somit die neuen Streifen durch das ganze Feld gingen.

Endlich kamen die eigentlich zum Magneten gehörigen Polschuhe zur Anwendung, die einen feinen Schlitz von 6 mm Höhe und 0,5 mm Breite bei einer Stirnfläche von 10 mm Durchmesser besitzen. Hier konnten die fraglichen Komponenten bei allen Variationen, die Feldstärke, Polabstand und Dampfdichte zuließen, niemals gefunden werden. Es scheint danach, als ob in der Tat diese Komponenten nur bei inhomogener Feldverteilung auftreten können.

Neuerdings[2]) hat Herr Zeeman die früheren Versuche mit Polschuhen wiederholt, die von Herrn Du Bois[3]) für Beobachtungen in schiefer Richtung gegen die Kraftlinien angegeben sind. Nach der von ihm mitgeteilten Figur, die den Querschnitt schematisch wiedergibt, möchte man glauben, daß wegen der starken Dissymmetrie der Eisenmassen nächst dem Interferrikum auch bei derjenigen Stellung, die für rein longitudinale Beobachtung bestimmt ist, die Kraftlinien schief gegen die Magnetachse und gegen die Richtung der Beobachtung verlaufen, und daß das Auftreten der neuen Komponenten hierauf beruhe.

Göttingen, im Juli 1914.

(Eingegangen 11. September 1914.)

1) O. M. Corbino, Diese Zeitschr. 11, 521, 1910.
2) P. Zeeman, Researches in Magnetooptics, S. 151; Deutsche Ausgabe, S. 161.
3) H. J. E. G. Du Bois, Versl. Akad. Amst. 19, 317, 1910.

Versuche über die Erzeugung und Messung hochgradiger Vakua.
(Experiments on the production and measurement of high vacua)

Von J. W. Woodrow.

In der vorliegenden Arbeit soll die tatsächliche Ausführung eines empfindlichen absoluten Manometers nach Knudsen beschrieben und dessen Anwendung zur Messung niedriger Drucke erklärt werden. Ferner wird darin über einige zur Erreichung dieser Drucke angewandte Verfahren berichtet.

Einleitung.

Die Theorie eines absoluten Manometers, das von dem zu messenden Gase unabhängig ist, hat Knudsen[1]) entwickelt. Er gibt indessen nur Daten an, um zu zeigen, daß seine Theorie durch das Experiment bestätigt wird, und beschreibt nicht die tatsächliche Ausführung eines solchen Manometers. Einen kurzen Überblick über die Handhabung einer Form des Knudsenschen Manometers hat Angerer[2]) gegeben, doch bin ich bei dem Versuche, einen empfindlichen Apparat nach seinen Angaben zu bauen, auf einige Schwierigkeiten gestoßen. Da nun im hiesigen Institut einige Zeit auf die Konstruktion eines sehr empfindlichen Manometers verwandt worden ist, das zugleich leicht herzustellen und einfach zu handhaben sein sollte, so erschienen mir die Ergebnisse dieser Versuche wertvoll genug, um ihre Veröffentlichung zu rechtfertigen.

Frühere Versuche hatten gelehrt, daß für die Messung sehr niedriger Drucke das ganze Manometer so konstruiert sein muß, daß man es, während es an die Pumpe angeschlossen ist, in einen Ofen bringen und auf eine Temperatur von ungefähr 200° C erhitzen kann. Weiter war es erwünscht, das Volumen des Manometers so klein wie möglich zu machen, und alles nicht unbedingt erforderliche Metall

1) M. Knudsen, Ann. d. Phys. (4) **32**, 809, 1910.
2) E. v. Angerer, Ann. d. Phys. (4) **41**, 10, 1913.

zu vermeiden. Das von Angerer beschriebene Manometer konnte nicht erhitzt werden, ohne Gefahr zu laufen, zu springen, eine Schwierigkeit, die bei dem unten zu beschreibenden Apparat überwunden worden ist.

Beschreibung des Apparates.

Es wurden mehrere verschiedene Manometer von verschiedener Empfindlichkeit konstruiert, so daß sie für verschiedene Drucke Verwendung finden können. Ein typisches Manometer zeigen die Fig. 1 u. 2, während Fig. 3 die elektrische Schaltung zeigt. Die Glasstäbe *GG* dienten als Halter für die Metallteile des Apparates. Alle inneren elektrischen Verbindungen und Einstellungen, mit Ausnahme der endgültigen Einstellung, erfolgten, ehe die äußere Glaswandung *OO* bei *SS* angeschmolzen wurde. Die Aufhängevorrichtung *W* war ein 50 mm langes Phosphorbronzeband, das von der Firma W. G. Pye and Co. bezogen und von ihr als No. 0000 bezeichnet worden war. Der bewegliche Flügel *VV* bestand aus einem rechteckigen Rahmen aus 0,076 mm starkem Aluminium, und zwar waren die Abmessungen des äußeren Rechtecks 30×36 mm, die des inneren 26×30 mm. Die Heizplatten *PP* waren Platinstreifen von 4 mm Breite, 40 mm Länge und 0,025 mm Dicke. Die Ablenkungen des beweglichen Flügels wurden in der üblichen Weise durch Reflexion eines Lichtstrahls an dem Spiegel *M* ermittelt. Fig. 2 zeigt einen Querschnitt durch die Mitte der Fig. 1.

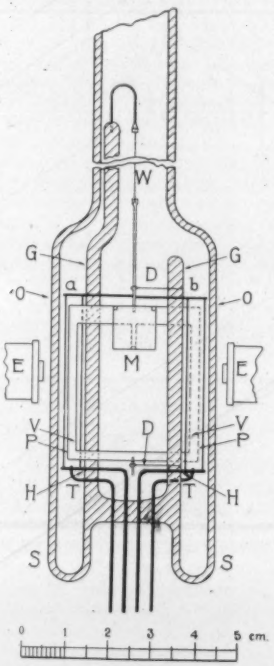

Fig. 1.

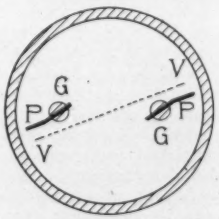

Fig. 2.

Alle Platinverbindungen wurden mittels elektrischer Schweißung hergestellt. Es hatte sich nämlich herausgestellt, daß dieses, besonders beim Erhitzen, weit zuverlässiger ist als die Verwendung irgendwelchen Lötmaterials. Nach einiger Übung gelang es, die dünnen Platin-Heizflügel so an den starken Platindraht anzuschweißen, daß auf der ganzen Breite ein vollkommen kontinuierlicher Kontakt hergestellt wurde. Das Aufhängeband aus Phosphorbronze wurde an beiden Enden in der Weise befestigt, daß es durch drei kleine Löcher gezogen wurde, die in die abgeplatteten Enden des Platin- bzw. Aluminiumdrahtes gebohrt worden waren. Die kleinen Ösen *DD* waren so angeordnet, daß sie den beweglichen Flügel *V* trugen, wenn das Manometer nicht gerade zur Vornahme von Ablesungen eingestellt wurde. Hierdurch war das Manometer leicht transportabel, und dadurch, daß es in die umgekehrte Lage gebracht wurde, wenn es an die Molekularpumpe angeschlossen wurde, war die Gefahr eines Bruches der Aufhängung infolge von Schwingungen ausgeschlossen. Ein Manometer von mittlerer Empfindlichkeit wurde so konstruiert, daß es stabil genug war, um bei unmittelbarem Anschluß an die Molekularpumpe benutzt werden zu können. Zu allen Verbindungsteilen des Apparates wurden weite Glasröhren verwendet.

Der von Angerer benutzte bewegliche Flügel bestand aus versilbertem Glimmer; die vorliegende Untersuchung hat indessen gezeigt, daß ein solcher Flügel sehr empfindlich gegen Veränderungen des auf ihn auffallenden Lichtes

ist. Eine gewöhnliche Wolframlampe von 40 Watt, die in 50 cm Abstand angebracht worden war, so daß sie den Flügel beschien, rief einen Ausschlag von 100 mm hervor, wenn der Druck ungefähr 10^{-3} mm Hg betrug. Daß es sich bei dieser Erscheinung nicht um eine direkte Wärmewirkung handelte, wurde dadurch dargetan, daß eine nichtleuchtende Bunsenflamme, die ganz nahe an den Apparat herangebracht wurde, keinen Einfluß hatte, und daß bei einer leuchtenden Flamme der Effekt sogleich zu beobachten war. Wenn der versilberte Glimmer durch Aluminium ersetzt wurde, war der Einfluß eines Lichtwechsels so gering, daß er vernachlässigt werden konnte. Das bewegliche System war durch die Aufhängung elektrisch mit dem geerdeten Ende der Heizstreifen verbunden, und das Ganze war durch einen geerdeten Silberüberzug auf der Außenseite der Glaswandung gegen äußere elektrische Störungen geschützt. Bei einem früheren Versuche befand sich die Versilberung auf der Innenseite der Wandung, doch war diese Anordnung nicht zufriedenstellend, weil es nicht möglich war, die Belegung während der Verbindung mit der Molekularpumpe von Gasen frei zu machen. Das oben genannte Verfahren zum elektrischen Schutz war jedoch gut genug, solange im Innern des Apparates keine Ionisationsquelle vorhanden war; wenn aber das Manometer an eine Ionisierungskammer angeschlossen wurde, wurden die elektrischen Störungen sehr lästig, sobald die Ionisation stark war. Es wurde in diesem Falle kein Versuch gemacht, die Diffusion der Ionen zu verhindern, obgleich dies durch ein passendes Drahtnetz leicht geschehen konnte.

Ein kleiner Elektromagnet, der in Fig. 1 bei E dargestellt ist, diente dazu, den beweglichen Flügel zur Ruhe zu bringen. Dies erwies sich beim Arbeiten mit den empfindlichsten Manometern als durchaus notwendig, denn in einem sehr guten Vakuum ist die Dämpfung so gering, daß der Flügel sich einige Zeit, nachdem er durch eine zufällige Störung in Schwingungen versetzt worden ist, nicht hinreichend beruhigt, um die Ausführung der Ablesungen zu gestatten. Es ist zu beachten, daß der Elektromagnet entweder einen Luftkern oder einen solchen aus gutem, weichem, schwedischem Eisen haben muß. Andernfalls bringt nämlich der remanente Magnetismus einen falschen Nullpunkt zuwege, falls der Aluminiumflügel im geringsten magnetisch ist, was bei den in hiesigen Institut untersuchten Metallproben der Fall war. Es ist klar, daß unter diesen Verhältnissen der Elektromagnet nur zum Dämpfen benutzt werden darf, und daß der erregende Strom während der Ausführung der Beobachtungen abgestellt sein muß.

Es wurden mehrere Verfahren versucht, die Temperatur der Heizstreifen zu bestimmen. Schließlich entschied ich mich für die in Fig. 3

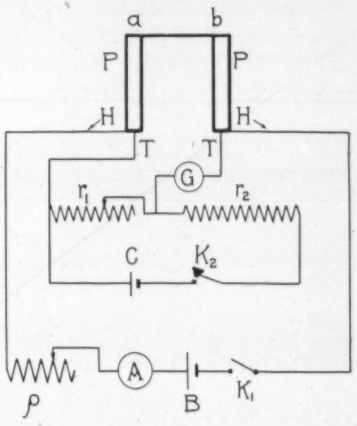

Fig. 3.

schematisch dargestellte als für die, welche die befriedigendsten Ergebnisse lieferte. Die Potentiometerzuleitungen TT wurden durch elektrische Schweißung an die äußersten Enden der Platin-Heizstreifen PP angeschlossen. Die Heizstromstärke wurde durch den veränderlichen Widerstand ρ geregelt und ihr Wert an dem Amperemeter A abgelesen. Der Widerstand r_2 wurde konstant auf 10,000 Ohm gehalten, und r_1 wurde so lange verändert, bis an dem empfindlichen Galvanometer G eine Abgleichung erreicht wurde. Die Potentiometerbatterie bestand aus einem sorgfältig geeichten Weston-Normalelement, C. Diese Anordnung lieferte ein genaues Verfahren zur Messung des Widerstandes der Platinstreifen PP einschließlich jenes des dicken Platindrahtes ab, und zwar betrug der gesamte Kaltwiderstand 0,17 Ohm. Dieser Kaltwiderstand wurde in der Weise bestimmt, daß die Kurve, welche Widerstand und Heizstrom miteinander verbindet, für konstanten niedrigen Druck gezeichnet und dann rückwärts bis zum Schnittpunkt mit der Widerstandsachse extrapoliert wurde. Wird der Widerstand für kleine Stromstärken gemessen, so kann man den Wert bei der Stromstärke null, also den Kaltwiderstand, sehr genau bestimmen. Eine typische Kurve ist in Figur 4 dargestellt. Der Temperaturkoeffizient des Widerstandes für das

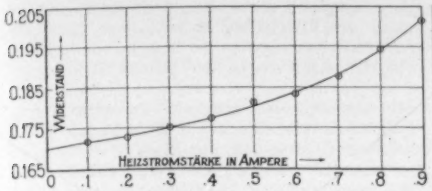

Fig. 4.

Platin, das eine kleine Menge Iridium enthielt, wurde sorgfältig gemessen, und es ergab sich innerhalb des benutzten Temperaturbereiches eine lineare Beziehung. Der Wert des Koeffizienten war $2{,}35 \times 10^{-3}$ Ohm per Grad Celsius. Mit diesem System kann man die mittlere Temperatur der Heizstreifen mit hinreichender Genauigkeit bestimmen; der Fehler für Temperaturdifferenzen von ungefähr 50^0 ist dabei kleiner als 4 v. H. Es muß erwähnt werden, daß viele Versuche gemacht worden sind, feine Thermoelemente zu benutzen; es war aber praktisch unmöglich, einen guten Wärmekontakt mit den Heizstreifen herzustellen, der bei Erwärmung bis auf 200^0 C konstant geblieben wäre.

Berechnung der Konstanten des Manometers.

Nach der von Knudsen angegebenen Theorie wird der Gasdruck im Innern des Manometers durch die Formel

$$P = \frac{2K}{\sqrt{T_1/T_2} - 1},$$

gegeben, wo K der gleichförmige Druck in Dynen auf jedes cm² des beweglichen Flügels ist, und T_1 und T_2 die absoluten Temperaturen der Heizstreifen und des beweglichen Flügels sind. Wenn die Temperaturdifferenz gegenüber der absoluten Temperatur klein ist, können wir die Formel folgendermaßen schreiben:

$$P = 4K \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

Es ist zu beachten, daß diese Formel von der Natur des zu messenden Gases oder Dampfes unabhängig ist. Die Konstante K ergab sich aus dem Ausschlage, und die Konstanten der Aufhängung wurden in der üblichen Weise aus der Schwingungsdauer des beweglichen Systems und dem errechneten Trägheitsmoment des aufgehängten rechteckigen Rahmens ermittelt. Bei dem Manometer, dessen Abmessungen oben angegeben wurden, betrug die ganze Schwingungszeit 10,0 sec, und das berechnete Trägheitsmoment des beweglichen Flügels war 0,074 g cm². Das ergibt für den Druck:

$$P = 2{,}9 \times 10^{-5} \frac{T_2}{T_1 - T_2} d \text{ Dynen},$$

oder:

$$P = 2{,}2 \times 10^{-8} \frac{T_2}{T_1 - T_2} d \text{ mm Hg},$$

wo d der Ausschlag in mm auf der in 1 m Abstand vom Spiegel angebrachten Skala ist. Da es leicht möglich ist, eine Temperaturdifferenz von 100^0 C zu erhalten, und da man einen Ausschlag von 0,5 mm beobachten kann, so vermag das Manometer einen Druck bis zu 3×10^{-8} mm Hg hinab zu messen.

Es wurde vermutet, daß bei diesen sehr niedrigen Gasdrucken vielleicht der Strahlungsdruck einen im Vergleich zu jenem des Molekülbombardements merklichen Effekt haben könnte. Um einen solchen Effekt aufzuspüren, wurde der Ausschlag bei mehreren verschiedenen Werten der Temperatur der heißen Platinstreifen beobachtet, nachdem ein sehr konstanter Druck erreicht worden war. Wenn der Strahlungsdruck so klein ist, daß er vernachlässigt werden kann, muß zwischen dem Ausschlag und der Temperaturdifferenz eine lineare Beziehung bestehen; wenn dagegen der Strahlungsdruck nicht zu vernachlässigen ist, muß der Ausschlag rascher wachsen. Die nachstehende Tabelle lehrt, daß der Strahlungsdruck bei einem Gasdruck von etwa 10^{-6} mm Hg für Temperaturdifferenzen bis aufwärts zu 85^0 C keinen merklichen Einfluß hat.

Tabelle I.

Temperaturdifferenz in ^{0}C	Ausschlag in mm	Berechneter Druck in 10^{-6} mm Hg
8	4	3.4
20	9	3.1
35	17	3.3
65	28	2.7
83	40	3.2

Messung niedriger Drucke.

Der niedrigste mit einer Gaedeschen Molekularpumpe erhaltene Druck wurde mit einem Manometer besonderer Konstruktion gemessen, und zwar war der Druck 3×10^{-5} mm Hg. Als Vorpumpe diente eine Gaedesche Trommelpumpe, die einen Druck von 0,01 mm Hg lieferte, und die Molekularpumpe wurde mit 8000 Umdrehungen in der Minute betrieben. Das oben genannte Vakuum wurde naeh dreistündigem Pumpen erhalten, wobei das Manometer möglichst nahe an die Pumpe angeschlossen war, so daß das ganze Volumen nur aus der Pumpe

und dem gläsernen Verbindungsrohr bestand. In diesem Falle wurden indessen die Glaswände des Manometers nicht erhitzt.

Es ist interessant, das von der Molekularpumpe gelieferte Vakuum mit jenem zu vergleichen, das man erhält, wenn man ein seitliches Ansatzrohr mit Kokosnußkohle in flüssige Luft taucht. Durch das letztere Verfahren wurde der Druck nach etwa 36 Stunden auf 2×10^{-7} mm Hg herabgedrückt. Nach Entfernung der flüssigen Luft stieg der Druck auf einen etwas höheren Wert als den beim Abschmelzen des Manometers von der Molekularpumpe gemessenen, nahm dann aber wieder ab und näherte sich langsam dem beim Abschmelzen erhaltenen Werte. Wenn man dagegen die flüssige Luft wieder ersetzt, ehe diese allmähliche Abnahme beginnt, so erreicht das Vakuum sehr rasch den zuvor nach 36 Stunden erhaltenen Wert. Dieser Effekt rührt wahrscheinlich von einer Adsorption an den Glaswänden und den Metallteilen des Apparates her, durch welche die ursprüngliche Wirkung der Kohle und der flüssigen Luft so verlangsamt wird. Wenn die Wände sorgfältig erhitzt werden, während das Manometer an die Pumpe angeschlossen ist, ist diese Erscheinung nicht so ausgeprägt.

Den niedrigsten Druck, den wir gemessen haben, erhielten wir durch Verwendung von Holzkohle und flüssiger Luft in der üblichen Weise unter gleichzeitiger Zuhilfenahme der entluftenden Wirkung eines in ein Seitenrohr eingeschmolzenen und 130 Stunden lang betriebenen Wolframfadens. Der Druck hatte einen Wert von 5×10^{-8} mm Hg erreicht, als die Untersuchung durch einen dem Apparat zugestoßenen Unfall ein Ende erreichte.

Wir erhielten einige interessante Angaben über die Wirksamkeit von Gummihahnenfett für die Aufrechterhaltung eines guten Vakuums. Ein System, welches drei Hähne und einen großen Glasschliff enthielt, erreichte unter der Einwirkung von Kokosnußkohle und flüssiger Luft ein Vakuum von 10^{-6} mm Hg. Das Vakuum blieb auf diesem Werte mehrere Tage lang konstant, während die Kohle in flüssige Luft eingetaucht blieb. Als jedoch das Rohr mit der Kohle durch Schließen eines der Hähne abgeschaltet wurde, nahm der Druck allmählich, aber sehr langsam zu.

Da das absolute Manometer nach Knudsen den Druck unabhängig von der Natur des Gases mißt, so liefert es ein bequemes Verfahren, die Schnelligkeit zu bestimmen, mit welcher in flüssige Luft getauchte Kokosnußkohle verschiedene Gase beseitigt. Wir haben diesen Effekt an Sauerstoff, Stickstoff und Wasserstoff untersucht, doch war es nicht möglich, einen genauen quantitativen Vergleich anzustellen, weil der Sauerstoff unter der Einwirkung der flüssigen Luft gar zu schnell beseitigt wurde. Man kann indessen aus den Angaben in der Tabelle II eine gewisse Vorstellung von dem Verhältnis zwischen den Schnelligkeiten erhalten. In jedem Einzelfalle wurde der Druck vor dem Einlassen des bekannten Gases auf denselben Wert, nämlich auf $1{,}5\times 10^{-6}$ mm Hg erniedrigt; dabei wurde die Kokosnußkohle gründlich erhitzt, während sie an die Molekularpumpe angeschlossen war. Zuerst wurde Wasserstoff untersucht, dann Sauerstoff und Stickstoff in der angegebenen Reihenfolge. Die in der ersten Spalte enthaltenen Werte sind die Zeiten, die seit der durch Öffnen des Hahnes hergestellten Verbindung des die Kokosnußkohle enthaltenden Rohres mit dem Manometer verstrichen waren. Beim Sauerstoff wurden die Messungen in der Weise angestellt, daß der Hahn zur Zeit nur einige wenige Sekunden offen gelassen wurde. Auf die Bereitung dieser Gase wurde keine besondere Sorgfalt verwandt; infolgedessen waren sie nicht ganz frei von anderen Gasen und Dämpfen, doch waren sie rein genug, um die Erscheinung deutlich zu zeigen.

Tabelle II.

Wirkungszeit	Druck in 10^{-6} mm Hg für:		
	Wasserstoff	Sauerstoff	Stickstoff
0	485	500	450
5 Sekunden	—	290	—
10 „	—	170	—
1 Minute	460	2	15
5 Minuten	410	1,5	—
20 „	290	—	—
1 Stunde	190	—	5
3 Stunden	135	1,5	—
10 „	135	1,5	5

Research Laboratory of the American Telephone and Telegraph Company and the Western Electric Company, New York City.

(Nach dem Manuskript aus dem Englischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 4. September 1914.)

Über den Einfluß von Strukturwirkungen, besonders der Thomsonschen Bildkraft, auf die Elektronenemission der Metalle.

Von Walter Schottky.

Strömen elektrisch geladene Teilchen von einer metallischen Elektrode zur andern durch das Vakuum, so wird ihre Bewegung durch ihre eigene Ladung auf zweierlei Weise modi-

fiziert. Einmal entsteht beim Vorwiegen einer Gattung von Elektrizitätsträgern eine Raumladung, die nach der Poissonschen Gleichung den Potentialverlauf zwischen den Elektroden beeinflußt und dadurch in gewissen Fällen für die Größe des übergehenden Stromes selbst maßgebend wird. Die für diese Vorgänge theoretisch ermittelten Gesetze sind in letzter Zeit durch verschiedene Experimentaluntersuchungen unzweifelhaft bestätigt worden.[1]) Andererseits ist schon vor längerer Zeit von P. Lenard[2]) darauf hingewiesen worden, daß in unmittelbarer Nähe der Metallfläche die durch die austretenden Ionen influenzierte entgegengesetzte Ladung, das „elektrische Bild" Sir W. Thomsons auf diese ungemein starke Kraftwirkungen ausüben muß. Quantitative experimentelle Belege für die Existenz dieser Kräfte sind allerdings, soviel ich weiß, bisher noch nicht vorhanden.

Man kann sich nun fragen, ob zwischen den anscheinend so verschiedenartigen Wirkungen der Raumladung und Bildkräfte nicht doch ein Zusammenhang besteht. Und in der Tat: faßt man nicht nur die von dem eigenen Spiegelbild auf das austretende Ion ausgeübten Kräfte ins Auge, sondern auch die Wirkung der Nachbarionen und ihrer Spiegelbilder, so scheint die ganze Raumladungstheorie in der Bildwirkungstheorie aufzugehn; umgekehrt: berücksichtigt man, daß die Kraftlinien der von der Raumladung hervorgerufenen elektrischen Felder in den Metalloberflächen enden, so scheint auch hier das Spiegelungsgesetz erfüllt und die Bildwirkung in den Gleichungen mit inbegriffen zu sein. In Wirklichkeit ist der Raumladungstheorie jedoch das durch die „Bildkraft" bedingte starke Anwachsen des elektrischen Potentials in der Nähe der Leiteroberflächen fremd. Wir sehen sofort, woher das kommt: in der bisherigen Raumladungstheorie ist die Struktur der Elektrizität vernachlässigt worden. Es erhebt sich die Frage: Ist der durch die Struktur der Elektrizität bedingten Thomsonschen Bildkraft ein Einfluß auf die Gestalt der Stromspannungskurve der Entladung zuzuschreiben? Und ferner: Ist die Thomsonsche Bildkraft die einzige Strukturwirkung, die in der bisherigen Raumladungstheorie vernachlässigt ist, oder gibt es noch andere solche Wirkungen und wie äußern sie sich? Wir resümieren: Nicht zwischen Bild- und Raumladungswirkungen besteht ein Gegensatz, sondern zwischen den elektrostatischen Theorien der kontinuierlichen und quantenhaften Elektrizitätsverteilung im Vakuum.

Keine Strukturwirkungen außerhalb der Bildkraftsphäre.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf den Fall, in dem wegen der relativ großen ins Vakuum übergeführten Elektrizitätsmengen am ersten Strukturwirkungen zu erwarten sind: den Fall der Emission von Elektronen aus (glühenden) Metallen.

Wir betrachten ein elektrisches Teilchen $\mathfrak{T}$, das sich in mehr als 10^{-4} cm Abstand von den Elektroden befindet. Um den Nachweis zu führen, daß die quantenhafte Struktur der in der Umgebung von $\mathfrak{T}$ vorhandenen Elektrizitätsmenge keinen merklichen Einfluß auf die Bewegung von $\mathfrak{T}$ hat, genügt es, zu zeigen, daß die mittlere Wirkung eines Nachbarteilchens auf $\mathfrak{T}$ um mehrere Zehnerpotenzen kleiner ist als die entsprechende Eigengröße des Teilchens, die durch diese Wirkung geändert wird. Denn es kommen für die Strukturwirkung ja nur die nächstbenachbarten (10 bis 100) Teilchen in Betracht; die Wirkung der weiter entfernten ist auf alle Fälle dieselbe, als wenn die Elektrizität kontinuierlich verteilt wäre.

Aus der Bedingung, daß die kinetische Energie eines Teilchens $\mathfrak{T}$ groß sein muß gegen die Arbeit, die beim mittleren Abstand der anderen Teilchen von $\mathfrak{T}$ gegen das Feld eines Nachbarteilchens geleistet werden mußte, finden wir, wenn es sich um Elektronen in Maxwellscher Verteilung im Vakuum handelt, die Bedingung:

$$3KT \gg \varepsilon^2 \sqrt[3]{\frac{2i}{\varepsilon\sqrt{\frac{2KT}{\pi\mu}}}}.$$

Hierbei bedeutet K die Gaskonstante eines Elektrons, T die abs. Temperatur, ε die Ele-

1) Vgl. I. Langmuir, Diese Zeitschr. **15**, 348 u. 516, 1914; W. Schottky, Diese Zeitschr. **15**, 526, 624 u. 656, 1914; Ann. d. Phys. **44**, 1011, 1914; S. Dushman, Diese Zeitschr. **15**, 681, 1914. — Ich möchte das Raumladungsproblem nicht verlassen, ohne vorher eine Bemerkung berichtigt zu haben, die sich in meiner ersten Arbeit über dies Thema (S. 528) findet. Ich habe dort Zweifel geäußert an dem von I. Langmuir aufgestellten Satz, daß das $V^{3}/_{2}$-Gesetz für den Elektronenstrom allgemein bei beliebig gestalteten Elektroden gilt, falls die Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen gleich Null gesetzt werden kann. Diese Zweifel werden durch folgenden Hilfssatz widerlegt, auf den Herr Langmuir mich brieflich hinwies: „Die Bahn der mit der Anfangsgeschwindigkeit o aus einer Oberfläche konstanten Potentials austretenden Elektronen bleibt ungeändert, wenn die elektrische Kraft im ganzen Raum um den gleichen Bruchteil vergrößert wird". Wenn nun auch im Fall beliebig geformter Elektroden die (in Wirklichkeit vorhandenen) Anfangsgeschwindigkeiten sicher u. U. eine bedeutend größere Rolle spielen, als bei symmetrischen Elektroden, so ist doch demnach der Langmuirsche Satz in der angegebenen Form richtig.

2) Ann. d. Phys. **8**, 187, 1902.

mentarladung eines Elektrons in elektrostatischen Einheiten, μ seine Elementarmasse und i den in elst. Einh. gemessenen Strom pro Flächeneinheit, der von der Gesamtheit aller Teilchen getragen wird, die in einer gegebenen Richtung eine positive Komponente haben. Setzen wir für K, ε und μ die bekannten Werte ein und messen zugleich den Strom i in Ampere, so erhalten wir

$$i_{\text{Amp}} << 2{,}56 \cdot 10^{10} \left(\frac{T}{2000}\right)^{3/2}. \qquad (1)$$

Diese Bedingung gilt für den Fall des thermischen Gleichgewichts, wo die mittlere Energie der Elektronen (bei gegebener Temperatur) sowie der mittlere Elektronenabstand im Verhältnis zu dem eben definierten Strom i ihren kleinsten Wert haben. Für alle Vorgänge, bei denen die Strömung in einer Richtung die Strömung in der entgegengesetzten Richtung überwiegt, gewährleistet die Bedingung (1) a fortiori die Erfüllung der gestellten Forderung, falls i mit dem von der stärker emittierenden Elektrode ausgehenden Sättigungsstrom pro Flächeneinheit identifiziert wird. Wie bekannt, ist im Raum außerhalb der Bildkraftsphäre die Bedingung (1) stets weitaus erfüllt. Es ergibt sich somit die (schon von verschiedenen Seiten hervorgehobene) Tatsache, daß bei Glühemission von Elektronen Strukturwirkungen in einiger Entfernung von den emittierenden Flächen keine Rolle spielen können. Hier handelte es sich hauptsächlich darum, die Bedingung für das Verschwinden der Strukturwirkung in einer passenden Form aufzustellen, von der wir gleich noch weiteren Gebrauch zu machen haben.

Potential der Thomsonschen Bildkraft.

Wir wenden uns nun zu den Vorgängen in unmittelbarer Nähe der metallischen Oberfläche und betrachten zunächst die Bildkraft eines Elektrons auf sich selbst. Diese ist bekanntlich $= \frac{\varepsilon^2}{4x^2}$, wobei x den Abstand von der (bei den betrachteten Abständen als makroskopisch eben anzusehenden) metallischen Oberfläche bedeutet. Dies Gesetz gilt aber nicht für beliebig kleine x, wo die Kraft unendlich werden würde, sondern bloß bis zu einer gewissen Entfernung x_0; diese Entfernung kann für die verschiedenen Metalle verschieden sein, was nach P. Debye[1]) Unterschiede in den Bildkräften und damit eine Erklärung der Voltadifferenzen im Vakuum ermöglichen würde. Eine Annäherung an das wirkliche Kraftgesetz wird man erhalten, wenn man die Bildkraft bis zu der Entfernung x_0 gleich $\frac{\varepsilon^2}{4x^2}$, für $0 < x < x_0$ konstant gleich $\frac{\varepsilon^2}{4x_0^2}$ setzt; das Potential dieser Kraft zwischen $x = 0$ und ∞, bezogen auf die Einheitsladung ist dann

$$A = \int_0^{x_0} \frac{\varepsilon}{4x_0^2}\, dx + \int_{x_0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{4x^2}\, dx \text{ oder}$$

$$A = \frac{\varepsilon}{2x_0}. \qquad (2)$$

Wir nehmen an, daß dieses Potential A der Größenordnung nach mit dem Potential, das der Austrittsarbeit der Elektronen aus dem Metall entspricht, übereinstimmt. Der Abstand x_0, den wir als „kritischen Abstand" bezeichnen, wird dann bei allen bekannten Substanzen einige Vielfache von 10^{-8} cm betragen. Ferner führen wir noch für einen Abstand $x \sim 10^{-4}$ cm die Bezeichnung x_1 ein; in Abstände von dieser Größenordnung kann man, wie Debye[1]) ausgeführt hat, die äußere Grenze der Thomsonschen Bildkraftsphäre verlegen, d. h. außerhalb von x_1 ruft die Bildwirkung keine merklichen Kräfte mehr hervor. Bei der Untersuchung der gegenseitigen Beeinflussung der Elektronen innerhalb der Bildkraftsphäre werden wir zweckmäßig zwischen Abständen $x > x_0$ und $x < x_0$ des Elektrons $\mathfrak{T}$ von der Metalloberfläche unterscheiden.

Die Bildkraftsphäre außerhalb des kritischen Abstandes.

a) Strukturwirkungen.

Wir betrachten zunächst das Gebiet $x > x_0$. Vernachlässigen wir hier etwaige aus dem Gebiet $x < x_0$ herübergreifende Strukturwirkungen, so läßt sich zeigen, daß die in der Schicht $x_0 < x < x_1$ befindlichen Elektronen auf das Elektron $\mathfrak{T}$ überhaupt keine merkliche Wirkung ausüben können. Wir beweisen das, indem wir in dieser Schicht wieder für die Elektronen Maxwellsche Verteilung annehmen[2]) und die Dichte der Elektronen außerhalb der Bildwirkungssphäre durch den gewöhnlichen Sättigungsstrom für bestimmt halten. Ferner setzen wir bei der Berechnung der Elektronendichte voraus, daß der Potentialanstieg in der betrachteten

1) Ann. d. Phys. 33, 441—489, 1910.

1) l. c.

2) Dabei kann die Dichte der Elektronen wieder nur überschätzt werden: 1. weil die abstoßenden Kräfte der Elektronen aufeinander, die eine Lockerung des Elektronenschwarmes hervorrufen würde, vernachlässigt sind, 2. weil dabei angenommen ist, daß alle Elektronen zum Metall zurückkehren.

Schicht allein durch das Bildpotential $\frac{\varepsilon^2}{4x}$ bestimmt ist; daß die Vernachlässigung anderer Strukturwirkungen berechtigt ist, zeigt die Rechnung selbst, und durch äußere Felder (die wir w. u. einzuführen haben) kann die Dichte der Elektronen innerhalb der Bildkraftsphäre nur unwesentlich verändert werden. Als numerisches Beispiel wählen wir Wolfram, wobei die Langmuirschen Daten zugrunde gelegt werden.

Wir erhalten mit Hilfe der bekannten Sätze über die Abhängigkeit der Elektronendichte vom Potential im thermischen Gleichgewicht, die auch für den Strom i gelten:

$$i = s \cdot e^{\frac{\varepsilon}{4x} \cdot \frac{\varepsilon}{KT}} < s \cdot e^{\frac{2}{4x_0} \cdot \frac{\varepsilon}{KT}}, \qquad (3)$$

wobei $s = i_{x=\infty}$ wieder als der gewöhnliche Sättigungsstrom pro Flächeneinheit zu deuten ist. Für $T = 2000$ ergibt dies bei Wolfram $i < 5 \cdot 10^5 s$; da s hierbei kleiner als 1 Amp. ist, befinden wir uns demnach für $x > x_0$ noch weit innerhalb des Bereiches, in dem Gl. (1) zutrifft. Und auch bei den höchsten erreichbaren Temperaturen und Sättigungsströmen bürgt Gl. (3) dafür, daß i mehr als 100mal kleiner ist als die durch Gl. (1) geforderte Grenze. Zugleich geht aus dieser Berechnung hervor, daß auch die Spiegelbilder, die von den Elektronen der Schicht $x_0 < x < x_1$ influenziert werden, auf das Elektron $\mathfrak{T}$ keine Strukturwirkungen auszuüben vermögen, da die Abstände dieser Bilder von $\mathfrak{T}$ notwendig noch etwas größer sind als die Abstände der Elektronen selbst.

b. Doppelschichtwirkung.

Zu untersuchen bleibt noch, ob durch Summation der Kraftwirkungen sämtlicher im Gebiet $x_0 < x < x_1$ vorhandenen Elektronen und der von ihnen influenzierten Ladungen eine Änderung der Bildwirkung hervorgerufen wird. Diese Frage ist von der vorigen ganz unabhängig; wissen wir doch, daß in größerer Entfernung von den Elektroden, wo ebenfalls die Wirkung der einzelnen Nachbarelektronen zu vernachlässigen ist, durch eine solche Summation eine „Raumladungswirkung" entsteht, die für den Potentialverlauf und die Größe des übergehenden Stromes von maßgebender Bedeutung sein kann. Wir können uns bei der Berechnung dieser Integralwirkung die Elektrizität homogen verteilt denken, da, wie wir sahen, die Strukturwirkung zu vernachlässigen ist.

Ist ϱ die Dichte der negativen Elektrizität im Abstand x, so ist $\varrho\, dx$ die Ladungsbelegung der Flächeneinheit der Schicht dx. Fassen wir die Ladung dieser Schicht mit der entgegengesetzten, von ihr auf der Metalloberfläche influenzierten Ladung zusammen, so erhalten wir eine elektrische Doppelschicht, die einen Potentialfall $= 4\pi\varrho x\, dx$ hervorruft. Nun ist, falls Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung herrscht,

$$\varrho = 2\sqrt{\frac{\pi\mu}{2KT}}\, i,$$

demnach nach 3)

$$\varrho = 2\sqrt{\frac{\pi\mu}{2KT}}\, s\, e^{\alpha \frac{x_0}{x}},$$

wobei $\alpha = \frac{\varepsilon}{4x_0} \cdot \frac{\varepsilon}{KT}$ gesetzt ist.

Der gesamte Potentialsprung H, der durch die in $x_0 < x < x_1$ vorhandenen Ladungen und die von ihnen influenzierten Gegenladungen hervorgerufen wird, ist

$$H = \int_{x_0}^{x_1} 4\pi\varrho x\, dx = 8\pi\sqrt{\frac{\pi\mu}{2KT}}\, s \int_{x_0}^{x_1} e^{\alpha \frac{x_0}{x}} x\, dx.$$

Indem man nacheinander von x_0 bis αx_0, αx_0 bis $\alpha^2 x_0$ usw. integriert, findet man

$$\int_{x_0}^{\alpha^n x_0} e^{\alpha \frac{x_0}{x}} x\, dx <$$

$$\frac{x_0^2}{2}(\alpha^2 - 1)\left\{e^{\alpha} + e\,\alpha^2 + e^{\alpha}\frac{1}{\alpha^4} + \ldots e^{\alpha \frac{1}{\alpha^{n-2}}} \alpha^{2(n-1)}\right\}$$

Setzen wir $T = 2000$, so ergibt sich für Wolfram ($\alpha = 13{,}1$) für $n = 4$

$$H < 2{,}6 \cdot 10^{-6} \text{ elst. Einh.} < \frac{1}{6000} A.$$

$x_1 = \alpha^4 x_0$ ist dann etwa $= 5 \cdot 10^{-4}$ cm; in dieser Entfernung hat die Bildkraft keinen meßbaren Einfluß mehr. Wir finden also, daß bei den gewöhnlichen Glühtemperaturen die elektrische Doppelschicht, die von den innerhalb der Bildkraftsphäre, aber außerhalb des „kritischen Abstands" x_0 vorhandenen Elektronen hervorgerufen wird, überhaupt keinen meßbaren Einfluß auf die Austrittsarbeit hat. Um so weniger kann eine Änderung der Elektronendichte in dieser Schicht auf den Potentialverlauf und Stromübergang von Einfluß sein. Die außerhalb $x = x_1$ vorhandenen Elektronen werden von der gewöhnlichen Raumladungstheorie (die in diesem Gebiet wiederum die Bildkraft vernachlässigen darf) mit erfaßt.

Die Bildkraftsphäre innerhalb des kritischen Abstandes.

Für das Gebiet $0 < x < x_0$ lassen sich unter entsprechenden Voraussetzungen ähnliche Betrachtungen anstellen, doch leidet hier die Rechnung an der Unsicherheit über die wahre Zahl

der freien Elektronen in unmittelbarer Nähe des Metalls[1]) und über die Verteilung der positiven Ladungen an der Metalloberfläche. Ich begnüge mich deshalb hier mit der Angabe, daß, falls, wie zu vermuten, die Zahl der freien Elektronen im Metall kleiner als die Zahl der Atome ist, die mittlere Wirkung der Nachbarelektronen auf das Elektron $\mathfrak{E}$ ebenfalls von etwas niederer Größenordnung ist, als die Thomsonsche Bildkraft und daß, falls die pos. Ladungen in der Oberfläche konzentriert angenommen werden, der Potentialsprung, der durch die in der Schicht $0 < x < x_0$ vorhandenen Elektronen hervorgerufen wird, bei Wolfram ($T = 2000$) weniger als den 300. Teil des Austrittspotentials beträgt.

Für alle übrigen Metalle, deren Glühemission untersucht ist, unterscheiden sich die einzusetzenden Konstanten von denen des Wolframs nicht so weit, um an den vorstehenden Größenordnungsbetrachtungen etwas zu ändern. Die aufgestellten Sätze gelten demnach, falls die Voraussetzungen zutreffen, allgemein. Aber auch etwas abweichende Annahmen über den wahren Verlauf des Bildpotentials und die Verteilung der Elektronen werden daran nichts Wesentliches ändern können.

Superposition von makroskopischer Feldwirkung und Thomsonscher Bildkraft.

Das Ergebnis der bisherigen Betrachtungen können wir folgendermaßen zusammenfassen. Im Bereich der Bildkraftsphäre ($x < 10^{-4}$ cm) spielen bei den erreichbaren Temperaturen und Sättigungsströmen Raumladungs- und Strukturwirkungen der gleichzeitig mit $\mathfrak{E}$ emittierten Elektronen neben der Thomsonschen Bildkraft keine Rolle. Sicher gilt dieser Satz wenigstens bis zu Entfernungen von der Metalloberfläche von etwa $2 \cdot 10^{-5}$ cm; für $x < 2 \cdot 10^{-5}$ cm wäre eine Beeinflussung der Austrittsarbeit eines Elektrons durch die unmittelbar benachbarten gleichzeitig austretenden Elektronen denkbar (womit eine Temperaturabhängigkeit der Austrittarbeit gegeben wäre); doch sind diese Einflüsse vermutlich klein gegen die gesamte Austrittsarbeit. Wird bei konstanter Temperatur das äußere Feld variiert, so bleibt, da der übergehende Strom immer klein ist gegen den wirklich aus der Metalloberfläche austretenden Strom, in dem Gebiet $x < x_0$, wo allein anderweitige Strukturwirkungen in Betracht kommen, die Dichte der Elektronen merklich ungeändert. Es läßt sich also sicher bei konstanter Temperatur für $x > x_0$ das für die Bewegung der Elektronen maßgebende wahre Potential Φ additiv zusammensetzen: 1. aus einem „makroskopischen Potential" Φ_m, dessen Verlauf zwischen den Elektroden durch die Potentiale Φ_{m1} und Φ_{m2} an den Grenzen und durch die Poissonsche Gleichung im Raum bestimmt wird, und 2. aus dem Bildpotential Φ_b eines Elektrons auf sich selbst, in der Nähe der Metalloberfläche.

$$\Phi = \Phi_m + \Phi_b. \tag{4}$$

Bewirkt nun die Bildkraft einen unveränderlichen Abfall des wahren Potentials Φ in unmittelbarer Nähe der Metalloberfläche oder ist dieser Potentialsprung durch das makroskopische Potential Φ_m zu beeinflussen? Diese Frage, die bisher wohl meist im ersten Sinne beantwortet worden ist, wollen wir jetzt untersuchen.

Der ebenen Metallplatte A stehe eine andere Metallplatte B parallel gegenüber, die stark positiv gegen A geladen ist, so daß zwischen A und B ein Feld entsteht, das die aus A austretenden Elektronen beschleunigt. Der Raumladungseffekt sei gegenüber dem starken angelegten Feld zu vernachlässigen. Es ist dann zwischen den Platten

$$\Phi_m = b\,x$$

$$\left(x \text{ Abstand von } A,\ b = \frac{d\,\Phi_m}{d\,x},\ \Phi_m(x=0) = 0.\right)$$

Betrachten wir ein Gebiet in der Nähe von A, wo $x > x_0$, aber klein gegen den Abstand AB ist, so gilt

$$\Phi_b = \frac{\varepsilon}{4\,x}.$$

Folglich nach (4)

$$\Phi = \frac{\varepsilon}{4\,x} + b\,x.$$

Wäre kein äußeres Feld vorhanden $\left(\frac{d\,\Phi_m}{d\,x} = 0\right)$, so wäre in einiger Entfernung von A $\Phi = 0$. Das angelegte Feld[1]) bewirkt, daß Φ den Wert 0 überhaupt nicht erreicht; Φ sinkt nur auf einen Minimalwert, um dann wieder anzusteigen. Der Unterschied des sich ergebenden Minimumpotentials M gegen 0 bestimmt den Unterschied der Austrittspotentiale, die mit und ohne Feld zu überwinden sind.

Aus $\frac{d\,\Phi}{d\,x} = 0$ folgt $x_m = \sqrt{\frac{\varepsilon}{4\,b}}$[2])

$$M = 2\sqrt{\frac{\varepsilon\,b}{4}} = \sqrt{\varepsilon\,b}, \tag{5}$$

1) Die Richardsonsche Formel ist bekanntlich nicht sicher genug, um die Zahl der freien Elektronen im Metall selbst zu bestimmen.

1) Von Kontaktpotentialen sehen wir hier der Einfachheit halber ab.

2) Eine Berechnung von x_m für zylindrische Elektroden schon bei J. Jentzsch, Ann. d. Phys. **27**, 152.

oder, wenn wir Voltzählung einführen und $\varepsilon = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ setzen,

$$M_{Volt} = 3{,}8 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{dV}{dx}}. \qquad (6)$$

Man sieht, daß bei Potentialgradienten von Millionen Volt/cm die Austrittsarbeit um etwa $^1/_3$ Volt vermindert wird.

Da Potentialgradienten von dieser Größenordnung unschwer zu erzielen sind, ist durch Gl. (6) die Möglichkeit einer Prüfung der Bildwirkungshypothese gegeben. Zugleich wird es auf diese Weise gelingen, die normale Geschwindigkeitsverteilung der austretenden Elektronen über ein weiteres „Spektralgebiet" hin zu verfolgen. Einen besonders starken Effekt muß man bei der Glühemission von Elektronen durch teilweise Aufhebung der Bildwirkung erwarten, da hier die Zahl der durch die Bildkraft zurückgehaltenen Teilchen als ungeheuer groß gegen die unter gewöhnlichen Umständen austretenden Teilchen anzunehmen ist.

Ist s der in Ampere gemessene Sättigungsstrom (im ganzen oder pro Flächeneinheit), so finden wir, falls durch die austretenden Elektronen das Wärmegleichgewicht nicht merklich gestört wird, den durch den Potentialgradienten $\frac{d\Phi_m}{dx}$ erzwungenen Strom z nach bekannten Sätzen mit Hilfe von (5) und (6) zu:

$$\left| \begin{array}{l} z = s \cdot e^{\frac{\varepsilon}{kT} M} = s \cdot e^{\frac{\varepsilon^{1/2}}{kT} \sqrt{\frac{d\Phi_m}{dx}}} \\ z = s \cdot e^{\frac{4{,}4}{T} \sqrt{\frac{dV}{dx}}}. \end{array} \right. \qquad (7)$$

Dieselben Formeln gelten allgemein für symmetrische Elektroden von Abständen $> 10^{-4}$ cm; nur hat man dann unter $\frac{d\Phi_m}{dx}$ bzw. $\frac{dV}{dx}$ speziell den Gradienten des makroskopischen Potentials an der emittierenden Elektrode zu verstehen.

Besteht die emittierende Elektrode aus einem Draht vom Radius r, der von einem Zylinder mit dem Radius R umgeben ist, so ist in unmittelbarer Nähe des Drahtes

$$\frac{dV}{dx} = \frac{V}{r \ln \frac{R}{r}};$$

es wird also

$$z = s \cdot e^{\frac{4{,}4}{T} \sqrt{\frac{V}{r \ln \frac{R}{r}}}}. \qquad 8)$$

1908. Dort wird jedoch x_m nur als „Schichtdicke" gedeutet, die Änderung der Austrittsarbeit durch das Feld, auf die es uns hier gerade ankommt, nicht beachtet.

Vorläufige Versuche über die Aufhebung der Bildwirkung durch starke Felder bei Glühemission.

Zur Prüfung der Gl. (8) erschien es zweckmäßig, einen möglichst dünnen Glühdraht zu wählen, da in diesem Falle durch nicht allzu hohe Potentiale ungemein große Potentialgradienten an der Oberfläche des Drahtes zu erzielen sind. Es wurde also ein Wolframdraht von 0,02 mm Radius (und 2 cm Länge) in eine Glasröhre eingespannt; diese wurde nach I. Langmuirs Angaben[1]) behandelt, und es betrug der beim Abschmelzen gemessene Druck etwa 10^{-5} mm Hg. Durch Verdampfen eines stärkeren Wolframfadens wurde auf der Glasröhre von 8 mm Weite, in die der Faden eingespannt war, ein Wolframniederschlag hergestellt, der als Anode diente. Bei den bisher angestellten Versuchen war leider die Bestäubung noch nicht gleichmäßig erfolgt, so daß nur ein Teil des Fadens von einer leitenden Anode umgeben war. Immerhin genügten die Versuchsverhältnisse, um das Vorhandensein des Effekts in der erwarteten Größenordnung zweifelsfrei zu konstatieren; und da die Fortführung der Versuche vorläufig durch äußere Umstände verhindert ist, möchte ich hier wenigstens kurz über die bisherigen Messungen und Ergebnisse berichten.

Während der Messungen wurde die Röhre in flüssige Luft getaucht; um, entsprechend den Voraussetzungen der Gl. (8), Raumladungswirkungen zu vermeiden, wurde mit schwachen Sättigungsströmen gearbeitet. ($s = 2 \cdot 10^{-7}$ Amp/qcm; $T \sim 1300^0$ abs.; aus s berechnet.) Untersucht wurde der Verlauf der Stromspannungskurve zwischen 10 und 5000 Volt, was Potentialgradienten am Draht von etwa 10^3 bis $5 \cdot 10^5$ Volt/cm entsprach.

Sämtliche Meßreihen zeigten den Effekt durchaus in den erwarteten Größenverhältnissen. Formel (8) liefert für $r = 2 \cdot 10^{-3}$ cm, $R = 0{,}4$ cm, $T = 1300^0$

$$\frac{z}{s} = 10^{\,0{,}014 \sqrt{V}}$$

$$\log \frac{z}{s} = 0{,}014 \sqrt{V}.$$

In der Tat: wurden zusammengehörige Werte von $\log z$ und $\sqrt{V}$ graphisch aufgetragen, so ergab sich innerhalb der Versuchsfehler, die auf kleine Schwankungen des Heizstromes zurückzuführen waren, eine gerade Linie, deren Steigung bei allen Meßreihen[2]) ober-

1) Diese Zeitschr. 15, 517, 1914.

2) Es wurde gemessen 1. von 0 bis 80, 2. von 0 bis 1020, 3. von 270 bis 1800, 4. von 320 bis 4000, 5. von 600 bis ca. 5000, 6. von 0 bis 80 Volt. Der Strom stieg

halb 100 Volt etwa = 0,0115 gefunden wurde. Die Übereinstimmung mit dem berechneten Wert (0,014) ist so gut, wie man bei der Unvollkommenheit der Anode nur erwarten konnte.

Zusammenfassung der Resultate.

1. Es wird die Strukturwirkung untersucht, die die innerhalb der Bildkraftsphäre angesammelten Elektronen aufeinander ausüben, sowie die Doppelschichtwirkung, die diese Elektronen im ganzen hervorrufen. Beide Wirkungen sind in den meisten Fällen zu vernachlässigen. Die einzige Strukturwirkung von Bedeutung ist die Bildkraft des eigenen Spiegelbildes auf das austretende Elektron.

2. Aus der ungestörten Superposition der Thomsonschen Bildkraft und des äußeren Feldes werden die Gesetze abgeleitet, die gelten müssen, wenn die Bildkraft zum Teil durch hohe Spannungen aufgehoben wird. Für die Elektronenemission eines Glühdrahtes im Hochspannungsfelde wird eine Formel aufgestellt, die der experimentellen Prüfung zugänglich ist.

3. Durch vorläufige Versuche mit einem dünnen Wolframdraht im höchsten Vakuum wird mit Sicherheit festgestellt, daß der erwartete Effekt in der berechneten Größenordnung vorhanden ist.

Die Versuche sollen, sobald sich Gelegenheit bietet, fortgesetzt werden. Die Anwendung der Beziehungen (5) und (6) auf lichtelektrische Erscheinungen ergibt sich von selbst; desgleichen gestattet die Theorie, exakte Formeln für den Elektronenübergang bei sehr kurzen Trennungsstrecken aufzustellen. Doch scheint mir eine Diskussion dieser Formeln nicht angebracht, solange nicht die experimentelle Untersuchung dieser Fragen zu vollständig sichern Gesetzen geführt hat.

bei diesen Messungen bis auf etwa das siebenfache seines normalen Wertes.

Steglitz, d. 27. August 1914.

(Eingegangen 4. September 1914.)

Zur Begründung der elementaren Strahlungstheorie[1].

(Dritte Mitteilung.)

Von David Hilbert.

Einleitung.

In zwei früheren Mitteilungen[2]) habe ich die elementare Strahlungstheorie nach der axiomatischen Methode behandelt; dies schien mir nötig, da jene Theorie die einzige unter den älteren physikalischen Theorien war, die eine solche Behandlung bis dahin nicht erfahren hatte und innerhalb derer daher sowohl die Begriffsbildungen wie die Beweisführungen an Unklarheiten litten.

Die Ergebnisse meiner bisherigen Untersuchungen habe ich am Schluß meiner zweiten Mitteilung zusammengefaßt: sie bestehen hauptsächlich in der Aufstellung und Diskussion von Axiomen, wie sie für die Beweisbarkeit des Kirchhoffschen Satzes über Emission und Absorption hinreichend bzw. notwendig sind — dabei wurden die optischen Koeffizienten: Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes q, Emissionskoeffizient η und Absorptionskoeffizient α im Raume kontinuierlich variabel angenommen und bei den Definitionen so verfahren, daß der der inneren Reflexion entsprechende Vorgang ausgeschlossen blieb. Daß das letztere Verfahren eine Annäherung an die strengen Folgerungen der elektromagnetischen Lichttheorie darstellt und schon insofern — wie überhaupt das Begriffssystem der elementaren Strahlungstheorie — berechtigt ist, geht insbesondere aus den neuen Untersuchungen von W. Behrens[1]) hervor: es zeigt sich nämlich, daß die in einem kontinuierlich veränderlichen Medium als reflektiert anzusehende Energie von zweiter Ordnung verschwindet, wenn man die Änderungen der optischen Koeffizienten q, η, α von erster Ordnung ansetzt[2]).

1) Vorgelegt in der Sitzung der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen vom 13. Juni 1914.

2) Vgl. Göttinger Nachrichten 1912, S. 773 und 1913, S. 409, sowie diese Zeitschr. 13, 1056, 1912 und 14, 592, 1913.

1) Mathematische Annalen 1914.

2) Zu der inzwischen (vgl. diese Zeitschr. 14, 847—850, 1913) erschienenen gegen mich gerichteten Publikation des Herrn E. Pringsheim bemerke ich kurz folgendes: Herr E. Pringsheim sagt darin, ich wäre in meiner zweiten Mitteilung „zu der Absicht einer axiomatischen Darstellung erst nachträglich und weniger aus inneren als aus taktischen Gründen gelangt". Mit dieser Mutmaßung dürfte er allein stehen — wenigstens unter den Gelehrten, die je von meinen wissenschaftlichen Bestrebungen Notiz genommen haben; für diese brauche ich kaum zu bemerken, daß ich lediglich aus Rücksicht auf das physikalische Publikum bei meinem Vortrage und dessen erster Veröffentlichung die Hervorkehrung des axiomatischen Standpunktes wegen seines abstrakten Charakters noch nicht für angebracht gehalten habe. — Aber auch die sachlichen Einwendungen des Herrn E. Pringsheim erscheinen mir in keinem Punkte stichhaltig. So hatte ich selbst darauf hingewiesen, daß in meinen Definitionen und Formen eine Reihe von Axiomen mitenthalten ist, die ich in den Beweisen benutzte: Herr E. Pringsheim verlangt die Formulierung aller dieser Axiome im einzelnen. Wie aber jeder Kenner axiomatischer Darstellungen weiß, würde die Erfüllung dieser Forderung in dem Rahmen einer kurzen Mitteilung nicht möglich sein. Einer solchen mit allen Kautelen umgebenen axiomatischen Darstellung bedarf es aber auch keineswegs — zumal wenn es sich um die erste derartige Begründung einer physikalischen Disziplin handelt; es genügt vielmehr in diesem Falle vollkommen, wenn die

Die vorliegende Mitteilung hat den Zweck, im Anschluß an meine in den beiden früheren Mitteilungen enthaltenen Entwickelungen und zugleich unter strenger Berücksichtigung der Reflexion neue und elementare Beweise des Kirchhoffschen Satzes zu entwickeln und dann vor allem die ebenso wichtige und nötige Frage nach dem Zusammenhange und der Widerspruchslosigkeit der aufgestellten Axiome zur Entscheidung zu bringen.

§ 1. Die Axiome der Strahlungstheorie.

Zunächst möchte ich die in meinen beiden vorigen Mitteilungen formulierten Axiome mit einigen geringfügigen Modifikationen hier zusammenstellen.

Für diese ganze vorliegende Untersuchung werde der Kürze halber von vornherein angenommen, daß die drei optischen Koeffizienten: die Größe q, der Absorptionskoeffizient α und der Emissionskoeffizient η allein durch die physikalische Natur der Materie bestimmt und von der Umgebung und der Gruppierung der Körper unabhängig sind[1]). Da die Temperatur überall ein und dieselbe ist, so sind die drei optischen Koeffizienten q, α, η lediglich Funktionen der reduzierten Wellenlänge λ[1]) und der Parameter p desjenigen Parametersystems, durch das wir die physikalische Natur der Materie festgelegt denken.

Hinsichtlich der in meinen beiden früheren Mitteilungen als Fortpflanzungsgeschwindigkeit bezeichneten Größe q ist zu bemerken, daß dieselbe streng genommen nur im Falle wenig absorbierender und emittierender Medien die Bedeutung einer Geschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) besitzt. Vielmehr ist im Gebiete der Strahlungstheorie unter q stets derjenige optische Koeffizient zu verstehen, der etwa im Sinne des bekannten Fermatschen Minimalprinzips[2]) den Lichtweg bzw. im Falle zweier homogener Medien die Richtung des gebrochenen Strahles charakterisiert. Nach M. v. Laue[3]) würde der im Falle des Durchtritts eines Strahles von einem homogenen absorbierenden Medium in ein anderes

$$q = \frac{c}{|\mathfrak{n}|}, \quad \mathfrak{n} = n\left(1 - i\frac{\alpha\lambda}{4\pi}\right)$$

zu nehmen sein; doch kann für die gegenwärtige Untersuchung diese Frage nach der Abhängigkeit der Größe q vom Brechungs- und Absorptionskoeffizient dahin gestellt bleiben.

Neben die Größe q tritt der Begriff der Energiegeschwindigkeit g, die ebenfalls nur von der physikalischen Natur der Materie abhängt und im allgemeinen von q verschieden ausfällt — ein Umstand, der bei der Berechnung der Energiedichte und der absorbierten Energie zu berücksichtigen ist[4]).

Die Axiome[5]) lauten nun:

Axiom A. (Axiom vom Ausgleich der Gesamtenergie.) Für jedes optische System ist ein Zustand des Gleichgewichts der Strahlung möglich. In diesem Zustande ist die gesamte, aus irgendeinem Volumenelement emittierte Energie aller Farben gleich der gesamten in demselben absorbierten Energie.

Axiom B. (Axiom vom Ausgleich der Energien jeder einzelnen Farbe.) Für jedes optische System ist ein Zustand des Gleich-

---

Darstellung so beschaffen ist, daß durch dieselbe jeder Leser bei gründlicher Vertiefung in den Stand gesetzt wird, an einer nicht wesentlichen Stelle die logische Schlußkette selbst zu ergänzen. — Ferner bemängelt Herr E. Pringsheim, daß meine Unmöglichkeitsbeweise seiner Meinung nach des physikalischen Sinnes entbehren; er übersieht, daß es sich an der betreffenden Stelle lediglich um den Nachweis der logischen Unabhängigkeit gewisser Axiomensysteme handelt, und dieser Nachweis wird von mir nach einer bewährten Schlußweise völlig streng erbracht. — Eines der merkwürdigsten Ergebnisse meiner ersten Mitteilung besteht darin, daß die Aussage: der Quotient $\frac{q^2\eta}{\alpha}$ hat für jede Stelle eines im thermischen Gleichgewicht befindlichen Systems denselben Wert, auf Grund einer Integralgleichung geschlossen werden kann, ohne daß irgendein Transport der Materie oder eine Veränderung ihrer physikalischen Beschaffenheit zum Beweise vorgenommen wird, was sonst beim Beweise des Kirchhoffschen Satzes stets geschieht. Dieses Ergebnis, das Herr E. Pringsheim völlig mißversteht, habe ich in meiner zweiten Mitteilung noch einmal besonders hervorgehoben mit den Worten: Der Satz, daß der Quotient $\frac{q^2\eta}{\alpha}$ stets eine vom Orte unabhängige Größe ist, bleibt meinem Beweis zufolge dennoch stets gültig, auch wenn wir davon absehen, daß die Größen η, α, q bereits durch die physikalische Beschaffenheit der Materie allein eindeutig bestimmt sind. Meine Behauptung ist zutreffend; aber auch ihre Formulierung ist völlig einwandfrei: denn bei meiner Entwickelung der Begriffe könnten die Größen q, η, α zunächst auch von der Umgebung der Stelle abhängen und diese Abhängigkeit wird erst durch ein besonderes Axiom 3 ausgeschlossen. — Das Unzutreffende in den übrigen kritischen Bemerkungen des Herrn E. Pringsheim erhellt aus den Ausführungen des Textes, vgl. insbesondere S. 888 und Anmerkung 1, 2. Spalte, daselbst.

1) Diese Aussage ist in meiner zweiten Abhandlung besonders als Axiom 3 formuliert worden.

1) Unter λ ist hier, wie in den beiden früheren Mitteilungen der Quotient von Lichtgeschwindigkeit im freien Äther und Schwingungszahl zu verstehen.

2) Vgl. meine erste Mitteilung.

3) Annalen der Physik (4), **32**, 1085, 1910.

4) Diese Unterscheidung zwischen q (Fortpflanzungs- = Phasengeschwindigkeit) und g (Energie- = Gruppengeschwindigkeit) ist in meinen beiden früheren Mitteilungen nicht gemacht worden; die erforderlichen Modifikationen in den Rechnungen sind jedoch geringfügig und werden später im Text dieser Mitteilung angegeben werden.

5) Die hier mit *A*, *B*, *C*, *D* bezeichneten Axiome sind im wesentlichen die Axiome bez. 1, 2, 4, 5 meiner zweiten Mitteilung.

gewichts der Strahlung möglich. In diesem Zustande findet an irgendeiner Stelle der Materie ein Austausch von Strahlungsenergien verschiedener Farbe nicht statt; vielmehr steht die Strahlung jeder Farbe für sich allein im Gleichgewicht.

Axiom C. (Axiom von der physikalischen Natur der Strahlungsdichte.) Für jedes optische System ist ein Zustand des Gleichgewichts der Strahlung möglich. In diesem Zustande ist die Dichte der Strahlungsenergie einer jeden Wellenlänge allein durch die physikalische Beschaffenheit der Materie an der Stelle eindeutig bestimmt, an welcher sich die Materie gerade befindet.

Axiom D. (Axiom vom Vorhandensein gewisser Verschiedenartigkeiten der Stoffe.) Es gibt Stoffe mit solchem Absorptionskoeffizienten a und solcher Größe q, daß der Quotient $\frac{a}{q^2}$ gleich einer willkürlich vorgeschriebenen Funktion der Wellenlänge λ ausfällt.

Das Axiom A ist im wesentlichen der Energiesatz; die Axiome B, C, D enthalten wesentlich die Tatsachen, die bez. von mir[1]), M. Planck[2]) und E. Pringsheim[3]) zur Begründung der Strahlungstheorie herangezogen worden sind.

Wir haben zunächst die Aufgabe, den Inhalt der aufgestellten Axiome zu formulieren.

Zu dem Zwecke betrachten wir den für unsere Untersuchung hinreichend allgemeinen Fall, daß der Raum von lauter optisch homogenen Körpern erfüllt ist; d. h., daß die optischen Koeffizienten q, (g), a, η sich nur auf gewissen diskret liegenden Flächen sprungweise ändern, sonst aber konstant sind.

Nach Formel (6) meiner ersten Mitteilung ergibt sich, wenn von der Reflexion abgesehen und überdies berücksichtigt wird, daß die Energiegeschwindigkeit nicht q, sondern g ist, für die Energiedichte in irgendeinem Punkte O der Wert

$$u = \frac{1}{4\pi q^2 g} \int\int\int \frac{e^{-A}}{S} \eta(xyz)\, dx\, dy\, dz$$

oder wegen Formel (11) meiner ersten Mitteilung

$$u = \frac{1}{4\pi q^2 g} \int \left[\int_0^s e^{-\int_0^s a(s)\, ds} \eta(s) q^2(s) ds \right] d\chi, \quad (1)$$

wo $d\chi$ das Differential der Kegelöffnung von O aus bezeichnet und die Integration nach s über denjenigen geradlinig gebrochenen Strahlenweg zu erstrecken ist, der von O in der durch $d\chi$ festgelegten Richtung ausgeht.

Um die Formel (1) für die Energiedichte in O auf den Fall zu übertragen, daß Reflexion stattfindet, haben wir nur nötig, das Integral rechter Hand durch die Summe von Integralen über alle diejenigen möglichen Strahlenwege zu ersetzen, die in Folge von Reflexion oder von Brechung und Reflexion an den Trennungsflächen zum Punkte O führen; dabei ist zugleich zu berücksichtigen, daß jedesmal bei der Reflexion des Strahles an einer Trennungsfläche die Energie desselben mit einem gewissen Faktor R und jedesmal bei dem Durchtritt desselben durch die Trennungsfläche mit einem gewissen Faktor D multipliziert werden muß. Alsdann stellt sich die Energiedichte im Punkte O in der Form dar:

$$u = \frac{1}{4\pi q^2 g} \int \left[\Sigma \int_0^s P e^{-\int_0^s a(s)\, ds} \eta(s) q^2(s) ds \right] d\chi; \quad (2)$$

dabei bezeichnet $d\chi$ das Differential der Kegelöffnung von O aus; die Integration nach s ist über den von O in der durch $d\chi$ festgelegten Richtung ausgehenden, durch Reflexion oder Brechung bestimmten geradlinig gebrochenen Strahlenweg zu erstrecken; P bezeichnet jedesmal das Produkt der dem Durchgang oder der Reflexion entsprechenden Werte von D, R und das Zeichen Σ endlich soll andeuten, daß die Summe über alle möglichen von O in der durch $d\chi$ festgelegten Richtung ausgehenden durch Reflexion und Brechung bestimmten Strahlenwege zu nehmen ist.

Nach Axiom C (Axiom von der physikalischen Natur der Strahlungsdichte) behält der in (2) rechter Hand stehende Ausdruck seinen Wert unverändert, wenn der Punkt O innerhalb desselben Körpers variiert oder die Gruppierung und Natur der den Punkt O nicht enthaltenden Körper beliebig geändert wird.

Ferner lehren die in meiner ersten Mitteilung angestellten Überlegungen, daß aus Axiom C (Axiom vom Ausgleich der Energien jeder einzelnen Farbe) die Gleichung

$$\eta = g\, a\, u \quad (2)$$

folgt; setzt man hierin für u den Ausdruck (2) ein, so entsteht eine in η lineare Integralgleichung, die der vollkommene Ausdruck des Axioms B ist.

In demselben Sinne endlich erscheint die Gleichung

$$\int_0^\infty (\eta - g\, a\, u)\, d\lambda = 0 \quad (4)$$

1) Vgl. meine erste Mitteilung.

2) Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung. 1. Abschnitt.

3) Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie 1, S. 360. 1903.

als der Ausdruck des Axioms A (Axiom vom Ausgleich der Gesamtenergie).

§. 2. Beweise des Kirchhoffschen Satzes.

Im folgenden sollen auf Grund der aufgestellten Axiome A, B, C, D unter strenger Berücksichtigung der Reflexion elementare Beweise des Kirchhoffschen Satzes entwickelt werden.

Wir verstehen — ähnlich wie gegen Schluß meiner zweiten Mitteilung — unter p einen Parameter des Parametersystems, das die physikalische Natur der Materie festlegt, und betrachten die optischen Koeffizienten $q, (g), \eta, \alpha$ als Funktionen des Parameters p. Sodann nehmen wir an, es sei eine Kugel mit dem Mittelpunkte O und dem Radium r homogen mit Materie erfüllt, deren optische Koeffizienten

$$c = q(p),\ \eta = \eta(p),\ \alpha = \alpha(p)$$

seien, während die den Raum außerhalb der Kugel homogen erfüllende Materie durch die Parameterwerte p_* und die optischen Koeffizienten

$$q_* = q(p_*),\ \eta_* = \eta(p_*),\ \alpha = \alpha(p_*)$$

charakterisiert sein möge.

Die elementare Optik lehrt, daß an der Grenze zweier nicht absorbierender Medien mit dem Brechungsexponent n bei senkrechter Inzidenz für die einfallende Energie E_e und die reflektierte Energie E_r die Relation

$$E_r = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 E_e$$

gilt. Für absorbierende Medien wird eine allgemeine Formel

$$E_r = M E_e \qquad (5)$$

gelten, wo M von q und α abhängt; der genaue Ausdruck für M ist aus den Formeln von M. Born und R. Ladenburg[1]) zu entnehmen: diese Formeln lassen erkennen, daß M folgende zwei Eigenschaften besitzt

a) M ist das Quadrat einer in q und α rationalen Funktion,

b) M ist in den optischen Koeffizienten q, α und q_*, α_* der beiden homogenen Medien symmetrisch gebaut.

Wir setzen nunmehr

$$p_* = p + \varepsilon p_1,$$

wo ε eine Variable, dagegen p_1 eine von Null verschiedene Konstante bedeuten soll, und drücken allgemein durch das Zeichen $\equiv$ (kongruent) aus, daß Gleichheit bis auf solche Glieder stattfindet, die in ε von höherer als erster Ordnung sind. Da M wegen seiner Bedeutung (5) für $p = p_*$, d. h. für $\varepsilon = 0$, verschwindet und andererseits wegen der Eigenschaft a das Quadrat einer in ε rationalen Funktion wird, so muß $M(p, p_*)$ durch ε^2 teilbar sein, d. h. es ist $M(p, p_*) = 0$ und folglich wegen (5) auch

$$E_r = 0. \qquad (6)$$

Die letztere Formel bringt im vorliegenden besonderen Falle die oben bereits erwähnte allgemeine Tatsache zum Ausdruck, daß die reflektierte Energie von zweiter Ordnung verschwindet, wenn man die Differenz der optischen Koeffizienten als erste Ordnung ansieht.

Wenn von der Reflexion abgesehen wird, so finden wir die Energiedichte im Mittelpunkt O der Kugel nach Formel (1), und dieser Ausdruck wird im vorliegenden Falle nach Ausführung der Integration über die Kegelöffnung gleich

$$u = \frac{1}{q^2 g}\int_0^\infty e^{-\int_0^s \alpha(s)\,ds}\,\eta(s)q^2(s)\,ds. \qquad (7)$$

Da nach den obigen Entwickelungen die an der Kugeloberfläche reflektierte Energie der Kongruenz (6) genügt, so verwandelt sich die Gleichung (7) bei Berücksichtigung der Reflexion in die Kongruenz:

$$u \equiv \frac{1}{q^2 g}\int_0^\infty e^{-\int_0^s \alpha(s)\,ds}\,\eta(s)q^2(s)\,ds. \qquad (8)$$

Nun sind offenbar die von O ausgehenden Strahlen die unendlichen Geraden: wir erhalten daher mit Rücksicht auf die Werte, die q, η, α innerhalb bzw. außerhalb der Kugel annehmen:

$$\int_0^\infty e^{-\int_0^s \alpha(s)\,ds}\,\eta(s)q^2(s)\,ds = \int_0^r e^{-\int_0^s a\,ds}\,\eta q^2\,ds + \int_r^\infty e^{-\int_0^r a\,ds - \int_r^s a_*\,ds}\,\eta_* q_*^2\,ds$$

$$= \int_0^r e^{-\alpha s}\eta q^2\,ds + \int_r^\infty e^{-\alpha r - \alpha_*(s-r)}\eta_* q_*^2\,ds$$

$$= \left(1 - e^{-\alpha r}\right)\frac{\eta q^2}{\alpha} + e^{-\alpha r}\frac{\eta_* q_*^2}{\alpha_*}$$

$$= \frac{\eta q^2}{\alpha} + e^{-\alpha r}\left(\frac{\eta_* q_*^2}{\alpha_*} - \frac{\eta q^2}{\alpha}\right).$$

Wegen

$$\frac{\eta_* q_*^2}{\alpha_*} - \frac{\eta q^2}{\alpha} \equiv \varepsilon p_1 \frac{d\,\frac{\eta q^2}{\alpha}}{dp}$$

ergibt sich schließlich aus (8) für den Wert der Strahlungsdichte im Mittelpunkte O

1) Diese Zeitschr. **12**, 198, 1911; vgl. auch S. Boguslawski, diese Zeitschr. **13**, 393, 1912.

$$u \equiv \frac{\eta}{cg} + \varepsilon p_1 \frac{e^{-\alpha r}}{q^2 g} \cdot \frac{d\frac{\eta q^2}{c}}{dp}. \qquad (9)$$

Andererseits geht offenbar die aus Axiom B folgende Gleichung (3) zufolge meiner obigen Ausführungen unter Berücksichtigung der Reflexion in die Kongruenz

$$u \equiv \frac{\eta}{cg}$$

über, und aus dieser folgt wegen (9)

$$\varepsilon p_1 \frac{e^{-\alpha r}}{q^2 g} \cdot \frac{d\frac{\eta q^2}{c}}{dp} \equiv 0,$$

d. h. wegen $p_1 \neq 0$,

$$\frac{d\frac{\eta q^2}{c}}{dp} = 0. \qquad (10)$$

Da p ein beliebiger Parameter des Parametersystems ist, das die physikalische Natur der Materie festlegt, so lehrt die Gleichung (10), daß der Quotient $\frac{\eta q^2}{c}$ von den sämtlichen Parametern unabhängig ist und mithin eine von der physikalischen Natur der Materie unabhängige Konstante darstellt. Damit ist der Kirchhoffsche Satz unter Rücksichtnahme auf die Reflexion wesentlich auf Grund des Axioms B (Axiom vom Ausgleich der Energien jeder einzelnen Farbe) bewiesen worden.

Noch einfacher gestaltet sich der Beweis des Kirchhoffschen Satzes auf Grund des Axioms C (Axiom von der physikalischen Natur der Strahlungsdichte). Denn wenn die Energiedichte u im Zustande des thermischen Gleichgewichtes lediglich durch die physikalische Beschaffenheit der Materie an der betreffenden Stelle bestimmt sein soll, so muß der für dieselbe im Sinne der Kongruenz erhaltene Ausdruck (9) rechter Hand vom Kugelradius r unabhängig sein, und dazu ist offenbar notwendig, daß die Gleichung (10) besteht; damit ist der Beweis des Kirchhoffschen Satzes in der gewünschten Weise erbracht.

Die eben dargelegten Beweise des Kirchhoffschen Satzes beruhten auf der Eigenschaft der Reflexion, wie sie in der Formel (6) zum Ausdruck gebracht ist. Der Beweis läßt sich jedoch auch auf Grund einer andern aus (5) unmittelbar folgenden elementaren Eigenschaft der Reflexion führen, nämlich auf Grund des Satzes, daß derjenige Bruchteil der Energie eines Strahles, welcher bei senkrechtem Einfall auf der einen Seite der Trennungsfläche reflektiert wird, genau gleich dem Bruchteil der auf der anderen Seite reflektierten Energie ist; diese Eigenschaft der Reflexion folgt aus (5) vermöge der Eigenschaft b des Ausdruckes M.

Um diesen Beweis zu führen, benutzen wir die Formel (2) zur Berechnung der Energiedichte im Mittelpunkt O unserer Kugel; dabei ist zu berücksichtigen, daß jedesmal bei der Reflexion des Strahles an der inneren Kugelfläche die Energie desselben mit dem Faktor R und jedesmal bei dem Durchtritt desselben durch die Kugeloberfläche von außen nach innen seine Energie mit dem Faktor D multipliziert werden muß.

Da die Summe der durchgehenden und der reflektierten Energie eines Strahles gleich seiner ursprünglichen Energie sein muß, so folgt unter Benutzung des eben genannten elementaren Satzes über die reflektierten Energien zu beiden Seiten einer Trennungsfläche, die Gleichung

$$D + R = 1. \qquad (11)$$

Nach der Formel (2) stellt sich alsdann, wenn noch die Integration über die Kegelöffnung ausgeführt wird, die Energiedichte in der Form dar

$$u = \frac{1}{q^2 g} \Sigma \int_0^\infty P e^{-\int_0^s \alpha(s)\,ds} \eta(s) q^2(s)\, ds, \qquad (12)$$

wo die Summe über alle möglichen von O ausgehenden Strahlenwege zu erstrecken ist und P jedesmal das Produkt der dem Durchgang oder der Reflexion entsprechenden Werte von D, R bedeutet. Die Berechnung dieser Integralsumme gestaltet sich folgendermaßen:

$$\Sigma \int_0^\infty = \int_0^r + D \int_r^\infty + R \int_r^{3r} + RD \int_{3r}^\infty + R^2 \int_{3r}^{5r} + R^2 D \int_{5r}^\infty + R^3 \int_{5r}^{7r} + R^2 D \int_{7r}^\infty + \ldots;$$

$$\int_0^r = \int_0^r e^{-\alpha s} \eta q^2 ds = -\frac{\eta q^2}{\alpha}\Big[e^{-\alpha s}\Big]_0^r = \frac{\eta q^2}{\alpha}(1 - e^{-\alpha r}),$$

$$\int_{mr}^{(m+2)r} = \int_{mr}^{(m+2)r} e^{-\alpha s} \eta q^2 ds = -\frac{\eta q^2}{\alpha}\Big[e^{-\alpha s}\Big]_{mr}^{(m+2)r} = \frac{\eta q^2}{\alpha}(1 - e^{-2\alpha r}) e^{-\alpha m r},$$

$$\int_{mr}^\infty = \int_{mr}^\infty e^{-\alpha m r - \alpha_0 (s - mr)} \eta_* q^2{}_* ds = \frac{\eta_* q^2{}_*}{\alpha_*} e^{-\alpha m r}$$

$$\Sigma\int_0^\infty = \frac{\eta q^2}{\alpha}(1-e^{-\alpha r})$$
$$+\frac{\eta q^2}{\alpha}Re^{-\alpha r}(1-e^{-2\alpha r})(1+Re^{-2\alpha r}$$
$$+R^2e^{-4\alpha r}+\ldots)$$
$$+\frac{\eta_* q^2{}_*}{\alpha_*}De^{-\alpha r}(1+Re^{-2\alpha r}+R^2e^{-4\alpha r}+\ldots)$$
$$=\frac{\eta q^2}{\alpha}\frac{(1-x)(1+Rx)}{1-Rx^2}+\frac{\eta_* q^2{}_*}{\alpha_*}\frac{Dx}{1-Rx^2},$$

und folglich

$$uq^2g=\frac{\eta q^2(1-x)(1+Rx)}{\alpha}+\frac{\eta_* q^2{}_*}{\alpha_*}\frac{Dx}{1-Rx^2};\quad(13)$$

dabei ist zur Abkürzung

$$x=e^{-\alpha r}$$

gesetzt worden.

Wollen wir nunmehr das Axiom C (Axiom vom Ausgleich der Energien jeder einzelnen Farbe) anwenden, so ist wegen (3)

$$u=\frac{\eta}{g\alpha}$$

und dadurch geht (13) in

$$\frac{\eta q^2}{\alpha}\left\{\frac{(1-x)(1+Rx)}{1-Rx^2}-1\right\}+\frac{\eta_* q^2{}_*}{\alpha_*}\frac{Dx}{1-Rx^2}=0$$

über. Wegen (11) folgt hieraus die zu beweisende Gleichung

$$\frac{\eta q^2}{\alpha}=\frac{\eta_* q^2{}_*}{\alpha_*}.\quad(14)$$

Andererseits soll nach Axiom C (Axiom von der physikalischen Natur der Strahlungsdichte) im Zustande des thermischen Gleichgewichts die Dichte der Strahlungsenergie allein durch die physikalische Beschaffenheit der Materie an der betreffenden Stelle bestimmt sein; es muß daher der Ausdruck (13) rechter Hand von dem Radius r der Kugel, d. h. von x unabhängig ausfallen. Dazu ist es offenbar notwendig und hinreichend, daß

$$\frac{\eta_* q^2{}_*}{\alpha_*}D=\frac{\eta q^2}{\alpha}(1-R)$$

wird und wegen (11) folgt hieraus wiederum die zu beweisende Gleichung (14).

Endlich ergibt sich dieselbe Gleichung auch auf Grund der Axiome A (Axiom vom Ausgleich der Gesamtenergie) und D (Axiom vom Vorhandensein gewisser Verschiedenartigkeiten der Stoffe).

Die aus Axiom A folgende Gleichung (4) nimmt unter Benutzung von (13) die Gestalt an

$$\int_0^\infty\left\{\eta-\eta\frac{(1-x)(1+Rx)}{1-Rx^2}\right.$$
$$\left.-\frac{\alpha}{q^2}\frac{\eta_* q^2{}_*}{\alpha_*}\frac{Dx}{1-Rx^2}\right\}d\lambda=0;$$

für $r=0$ wird hieraus wegen (11)

$$\int_0^\infty\left\{\eta-\frac{\alpha}{q^2}\frac{\eta_* q_*{}^2}{\alpha_*}\right\}d\lambda=0.$$

Ersetzen wir nunmehr den Stoff mit den optischen Koeffizienten q_*, α_*, η_* durch einen solchen Stoff mit den Koeffizienten $q_{**}, \alpha_{**}, \eta_{**}$ und subtrahieren die entsprechende Gleichung, so entsteht die Gleichung

$$\int_0^\infty\frac{\alpha}{q^2}\left\{\frac{\eta_* q^2{}_*}{\alpha_*}-\frac{\eta_{**}q^2{}_{**}}{\alpha_{**}}\right\}d\lambda=0$$

und aus dieser folgt nach Axiom D wegen der Willkür der Funktion $\frac{\alpha}{q^2}$ notwendig (14)[1].

§ 3. Strahlungstheorie und elementare Optik.

Wenn auch die eben mitgeteilten einfachen und elementaren Beweise des Kirchhoffschen Satzes an sich allen Anforderungen der Strenge genügen, so bedarf doch noch eine Frage prinzipieller Natur der Behandlung. So lange nämlich nicht feststeht, daß die sämtlichen Axiome eines Axiomensystems untereinander widerspruchslos sind, ist offenbar den Gesetzen der Logik zufolge die Möglichkeit vorhanden, daß auf Grund der Axiome des Systems jede beliebige Behauptung, so z. B. auch eine Behauptung und ihr Gegenteil bewiesen werden könnte. Die auf Grund des Axiomensystems geführten Beweise sind dann zwar richtig, die gefundenen Resultate aber bedeutungslos.

Überblicken wir nun die mannigfaltigen von mir benutzten Axiome A, B, C, D und bedenken, daß einerseits die Möglichkeit des thermischen Gleichgewichts für ein beliebiges materielles System in jedem Falle gefordert worden ist, und andererseits für Brechung und Reflexion auch die elementaren optischen Gesetze gelten sollen, so ist von vornherein keineswegs ersichtlich, warum nicht eine gewisse Gruppierung optisch verschiedenartiger Stoffe im Raume sich finden lassen sollte, bei der die gleichzeitige Befriedigung aller dieser Forderungen unmöglich ist. In diesem Falle wäre ein Teil der angenommenen und abgeleiteten Sätze jedenfalls nicht mathematisch genau formuliert. Die Frage nach der Widerspruchslosigkeit unserer Axiome läuft sonach zugleich darauf hinaus, zu entscheiden, ob und in welchem Sinne die

1) Wie man sieht, ist hierbei die Heranziehung der Gleichung (11) ein notwendiges Erfordernis für die Durchführbarkeit des Beweises und es wird so offenbar, daß der von Herrn Pringsheim l. c. (Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie 1, S. 360, 1903) versuchte Beweis des Kirchhoffschen Satzes unzureichend ist.

Kirchhoffschen Sätze mathematisch genaue Sätze sind.

Um diese Entscheidung herbeizuführen, untersuchen wir zunächst, ob gewisse Sätze über die Energieverteilung auf die einzelnen Strahlen bei Brechung und Reflexion als notwendige Folgerungen unserer Axiome erscheinen. Bei dieser Untersuchung wollen wir aus der elementaren Optik lediglich die in Formel (5) ausgedrückte Tatsache über die reflektierte Energie eines Strahles bei senkrechter Inzidenz annehmen; ferner werde von unseren Axiomen nur Axiom A (Axiom vom Ausgleich der Gesamtenergie) und Axiom D (Axiom vom Vorhandensein gewisser Verschiedenartigkeiten der Stoffe), und zwar letzteres in der folgenden erweiterten Fassung zugrunde gelegt:

*Axiom D** (Axiom vom Vorhandensein optisch beliebig verschiedener Stoffe). Es gibt Stoffe derart, daß für dieselben die Größe q und der Absorptionskoeffizient α gleich willkürlich vorgeschriebenen Funktionen der Wellenlänge λ ausfallen.

Nach § 2 folgt aus (5) und den Axiomen A und D der Kirchhoffsche Satz.

Wir denken uns nun um einen Punkt O als Mittelpunkt eine Kugel, deren Oberfläche um die Stelle M herum ein kleines kreisförmiges Loch mit der Winkelöffnung ω und ebenso um den zu M gegenüber gelegenen Punkt N

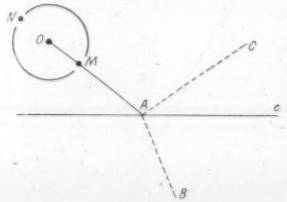

Fig. 1.

herum ein gleich großes kreisförmiges Loch besitzen möge; an allen übrigen Stellen soll die Kugeloberfläche von innen und außen spiegeln. Ferner sei e eine die Kugel nicht treffende Ebene: der durch dieselbe begrenzte und die Kugel enthaltende Halbraum sei von einem Stoffe mit den Koeffizienten q, α, η erfüllt und der den anderen Halbraum erfüllende Stoff habe die Koeffizienten q_*, α_*, η_*. Der Strahl OM treffe die Ebene e in A und werde dort nach B gebrochen und nach C reflektiert. Die Strahlungsdichte u einer bestimmten Wellenlänge in O ist, wie wir gefunden haben, durch Formel (2) bestimmt. Um für einen Strahl durch O, der die spiegelnde Kugelfläche trifft, die innere Integralsumme in (2) zu berechnen, haben wir nur

$$q(s) = q, \quad \eta(s) = \eta, \quad \alpha(s) = \alpha$$

zu nehmen und zu bedenken, daß wegen der totalen Reflexion an der inneren Kugelfläche P stets gleich 1 und der Strahl von unendlicher Länge ist. Für die spiegelnden Teile der Kugeloberfläche ist mithin

$$\left[\quad\right] = \int_0^\infty e^{-\alpha s} \eta q^2 ds = \frac{\eta q^2}{\alpha}. \qquad (15)$$

Den gleichen Wert erhalten wir für diejenige Winkelöffnung, innerhalb deren die durch das Loch der Kugel um N herum laufenden Strahlen liegen. Für die Richtung OM endlich erhalten wir, wenn $OA = l$ gesetzt wird:

$$\left[\quad\right] = \int_0^l e^{-\alpha s} \eta q^2 ds + R \int_0^\infty e^{-\alpha l - \alpha s} \eta q^2 ds + D \int_0^\infty e^{-\alpha l - \alpha_* s} \eta_* q_*^2 ds$$

und mit Benutzung des Kirchhoffschen Satzes (14)

$$\left[\quad\right] = \frac{\eta q^2}{\alpha} \{1 + e^{-\alpha l}(R + D - 1)\}. \qquad (16)$$

Tragen wir die Werte (15) und (16) in (4) ein, so ergibt sich, wenn wir durch die Winkelöffnung ω des Loches in der Kugelfläche dividieren und zur Grenze $\omega = 0$ übergehen

$$\int_0^\infty \eta e^{-\alpha l}(R + D - 1)\, d\lambda = 0$$

oder, wenn wir

$$\eta = \frac{\alpha}{q^2} k(\lambda)$$

setzen — unter $k(\lambda)$ die universelle Funktion des Kirchhoffschen Satzes verstanden —

$$\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha l}(R + D - 1) \frac{k(\lambda)}{q^2} d\lambda = 0. \qquad (17)$$

Nun hängen R, D nur von q, q_*, aber nicht von α[1]; ferner ist α nach Axiom D* (Axiom vom Vorhandensein optisch beliebig verschiedener Stoffe) als eine willkürliche Funktion von λ anzusehen: daher folgt aus (17)

$$R + D = 1, \qquad (18)$$

d. h. die von C und B kommenden nach A gerichteten Strahlen, auf gleiche

1) Diese Voraussetzung trifft sicher für schwach absorbierende Medien zu und in der Tat wird zum Schluß dieses Paragraphen die nachstehende Betrachtung nur auf den Grenzfall eines unendlich wenig emittierenden und absorbierenden Mediums angewandt.

Energie reduziert gedacht, vereinigen sich zu einem Strahle in Richtung AO, der wiederum die gleiche Energie besitzt.

Wir wollen nunmehr mit Hilfe derselben Axiome A und D^*, d. h. wiederum wesentlich aus der Energiegleichung (4), beweisen, daß der Strahl AO ein Strahl natürlichen (unpolarisierten) Lichtes ist. Zu dem Zwecke denken wir uns, wie vorhin um den Punkt O als Mittelpunkt eine Kugel, deren Oberfläche um die Stelle M herum ein kleines kreisförmiges Loch mit der Winkelöffnung ω und ebenso um den zu M vis-à-vis gelegenen Punkt N herum ein gleich großes kreisförmiges Loch besitzen möge; an allen übrigen Stellen soll die Kugeloberfläche von innen und außen spiegeln. Ferner seien e' und e zwei die Kugel nicht treffende Ebenen: der durch dieselben begrenzte und die Kugel enthaltende Raumteil sei von einem Stoffe mit den Koeffizienten q, α, η erfüllt und der den übrigen Raum erfüllende Stoff habe die Koeffizienten q_*, α_*, η_*. Der Strahl OM treffe zunächst die Ebene e' in A', werde dort nach B' gebrochen, während der reflektierte Strahl die Ebene e in A treffen möge und von dort nach B gebrochen und nach C reflektiert werde. Nach Axiom A gilt im Punkt O die Gleichung (4), wobei wir wiederum bei der Summierung, wie sie das Zeichen Σ in (2) andeutet, berücksichtigen müssen, daß bei dem Durchtritt des Strahles in A', die in der Richtung $B'A'O$ erfolgt, der Faktor D' und bei der Reflexion in A' der Faktor R', ferner bei dem Durchtritt in A, die in Richtung $BAA'O$ erfolgt, der Faktor DR' und bei der Reflexion in A der Faktor RR' hinzuzufügen ist. Behandeln wir dann die Energiegleichung (4) wie vorhin, indem wir ihre linke Seite durch ω dividieren und zur Grenze $\omega = 0$ übergehen, so ergibt sich für $OA' = l'$, $A'A = l$ mit Rücksicht auf (18) die Gleichung

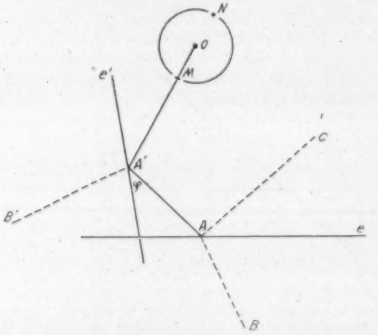

Fig. 2.

$$\int_0^\infty \eta e^{-\alpha l'}(R' + D' - 1)\, d\lambda = 0$$

und hieraus, wie vorhin:

$$R' + D' = 1. \qquad (19)$$

Jetzt denken wir uns die Ebene e und die Punkte A, A' festgehalten, ferner die Ebene e' mit der Kugel um O starr verbunden und drehen das aus der Ebene e' und der Kugel bestehende System um AA' als Achse derart, daß der Einfallswinkel φ unverändert bleibt. Bei der neuen Lage der Ebene e' ist der entsprechende Faktor D' derselbe wie früher, da ja bezüglich des durchgehenden Strahles $B'A'O$ keinerlei Änderung gegen früher eingetreten ist; daher hat wegen (19) auch R' denselben Wert wie früher d. h. die Energie des reflektierten Strahles $A'O$ ist unabhängig von der Orientierung des einfallenden Strahles AA' und damit ist meine Behauptung, daß der letztere keinerlei Polarisation aufweist, d. h. natürlichen Lichtes ist, als richtig erkannt.

Wir denken uns nun den Raum auf der einen Seite der Ebene e von einem Stoffe mit den optischen Koeffizienten q, α, η und auf der anderen Seite von einem Stoffe mit den optischen Koeffizienten q_*, α_*, η_* erfüllt; ferner treffe ein von O ausgehender Strahl die Ebene e im Punkte A und werde dort nach B gebrochen und nach C reflektiert. Halten wir jetzt q, q_* fest und lassen α, α_* und dem Kirchhoffschen Satze entsprechend auch η, η_* gegen Null abnehmen, so verschwindet überall im Endlichen die Energie emittierende und absorbierende Materie, während die von irgendeinem Punkte des gebrochenen bez. reflektierten Strahles ins Unendliche erstreckten Integrale

$$\int_0^\infty e^{-\alpha s} \eta q^2 ds, \quad \int_0^\infty e^{-\alpha_* s} \eta_* q_*^2 ds$$

stets denselben Wert k beibehalten.

Durch diese Überlegung gewinnen wir aus dem vorhin Bewiesenen den folgenden Satz:

Satz. Wenn der Raum von zwei durch eine Ebene voneinander getrennten durchsichtigen Medien erfüllt ist und zwei Strahlen natürlichen Lichtes und gleicher Energie von irgendeiner Wellenlänge von beiden Seiten her auf die gemeinsame Trennungsfläche in solchen Richtungen auffallen, daß der eine Strahl nach seinem Durchtritt und der andere nach seiner Reflexion dieselbe Richtung weist, so ist der durch die Vereinigung entstehende Strahl wieder-

um von natürlichem Lichte und der gleichen Energie.

Dieser Satz, den wir als eine Folgerung aus unseren Axiomen der Strahlungstheorie (Axiom A und D*) gefunden haben, gehört dem Gebiet der elementaren Optik an: er ist ein richtiger Satz dieser Wissenschaft, der aus den Fresnelschen Formeln über Reflexion und Brechung in der Tat abgeleitet werden kann. *Unsere Überlegungen haben mithin auf keinerlei Widerspruch gegen die Gesetze der elementaren Optik geführt.*

§ 4. Die Widerspruchslosigkeit der Axiome.

Wir wenden uns nunmehr der Hauptaufgabe dieser Untersuchung zu, nämlich dem Nachweise, daß unsere Axiome weder mit sich selbst noch mit den Gesetzen der Optik in Widerspruch sind.

Zu dem Zwecke führen wir fortan der Kürze halber eine besondere Ausdrucksweise ein. Es sei AB ein aus geradlinigen Stücken zusammengesetzter Linienzug, der ein Strahlenweg ist: wir wollen dann das unter dem Summenzeichen Σ in (2) vorkommende Teilintegral

$$\int_A^B Pe^{-\int_A^s \alpha(s)\,ds}\,\eta(s)q^2(s)ds$$

als die Linearenergie des Strahles AB im Punkte A bezeichnen; ist AB' ein anderer von A ausgehender Strahlenweg, so werde die Summe der Linearenergien der Strahlen AB und AB' als die Linearenergie des aus AB und AB' zusammengesetzten Strahlensystems im Punkte A bezeichnet. Insbesondere hat darnach die Linearenergie eines geradlinigen im homogenen Medium verlaufenden Strahles AB von der Länge l den Wert

$$\int_A^B e^{-\int_A^s \alpha\,ds}\,\eta q^2 ds = (1-e^{-\alpha l})k \qquad (20)$$

und für $l=\infty$ ergibt sich hieraus der Wert k, wie er vorhin (§. 3) bereits benutzt worden ist.

Nunmehr werde zunächst von den bisherigen Axiomen abgesehen; wir legen vielmehr der weiteren Untersuchung lediglich folgende drei Annahmen zugrunde, die im Zustande des optischen Gleichgewichtes für ein beliebiges System von Medien gelten sollen:

Annahme 1: Es gelte Axiom D* (Axiom vom Vorhandensein optisch beliebig verschiedener Stoffe).

Annahme 2: Es gelte der Kirchhoffsche Satz

$$\frac{\eta(\lambda)q^2(\lambda)}{\alpha(\lambda)} = k(\lambda),$$

wo $k(\lambda)$ eine von der Natur des Mediums unabhängige Funktion der Wellenlänge λ ist.

Annahme 3: Das durch Emission erzeugte Licht ist natürliches Licht; wenn zwei Strahlen natürlichen Lichtes und gleicher Linearenergie aus zwei verschiedenen Medien an der Grenze derselben zusammentreffen, so daß der reflektierte Strahl des einen und der gebrochene des anderen einen neuen Strahl bilden, so ist dieser Strahl wiederum von natürlichem Licht und gleicher Linearenergie.

Die Annahme 1 ordnet jedem Funktionenpaar $q(\lambda)$, $\alpha(\lambda)$ einen Stoff zu, der seinerseits dadurch optisch eindeutig charakterisiert ist. Die Annahme 2 bestimmt die zugehörige Funktion $\eta(\lambda)$. Die Annahme 3 entspricht den oben aus unseren Axiomen bewiesenen Folgerungen; sie ist nichts anderes als eine Festsetzung über die bei Reflexion und Brechung stattfindende Energieverteilung: wonach unter gewissen Umständen die Gleichung

$$R + D = 1 \qquad (21)$$

statthat.

Die Annahmen 1 und 2 sind offenbar voneinander unabhängig. Auch die Annahme 3 könnte mit den Annahmen 1 und 2 selbst dann nicht in Widerspruch treten, wenn sie die bedingungslose Gültigkeit der Gleichung (21) aussagen würde. In der formulierten Aussage ist die Annahme 3 auch nach dem oben Gesagten verträglich mit den Gesetzen der Optik und somit erkennen wir, daß die drei Annahmen gewiß weder untereinander noch mit den Gesetzen der Optik in Widerspruch sind.

Es gelingt nunmehr, die sämtlichen Aussagen, die in den Axiomen A, B, C enthalten sind, einschließlich des Bestehens eines optischen Gleichgewichtszustandes als strenge Folgerungen der Annahmen 1, 2 und 3 nachzuweisen.

Um dies einzusehen, fassen wir einen innerhalb des Körpersystems liegenden Punkt O und eine Richtung durch O ins Auge: der von O ausgehende in der bestimmten Richtung verlaufende Strahl spaltet sich, wenn er eine Trennungsfläche zweier Medien trifft, in zwei Strahlen, einen gebrochenen und einen reflektierten, diese wiederum erfahren beim Auftreffen auf eine Trennungsfläche das nämliche Schicksal, u. s. f. Jeder dieser von O in der bestimmten Richtung verlaufenden Strahlenwege s_i ist ein gebrochener von O aus in der bestimmten Richtung beginnender Linienzug; die geraden Stücke dieses Linienzuges s_i mögen von O aus anfangend bzw. mit

$$s_{i1},\ s_{i2},\ s_{i3},\ \ldots$$

bezeichnet werden, und die zugehörigen optischen Koeffizienten auf s_{ik} seien allgemein q_{ik}, α_{ik}, η_{ik}.

Alsdann verstehen wir unter A irgendeine große Zahl und suchen auf jedem der Strahlenwege s_i je einen Punkt A_i derart, daß die Größe

$$\alpha_{i1}s_{i1} + \alpha_{i2}s_{i2} + \ldots + \alpha_{in_i}s_{in_i} \qquad (22)$$

den Wert A erhält. Die Anzahl der in Betracht kommenden Strahlenwege s_i ist, wie wir annehmen können, endlich und wächst mit wachsendem A über alle Grenzen.

Wir wollen die gesamte auf den Wegen OA_i im Punkte O erzeugte Linearenergie, d. h. den Wert der Integralsumme

$$\sum_{i=1,\,2,\,\ldots} \int_O^{A_i} P e^{-\int_0^s \alpha(s)\,ds}\, \eta(s) q^2(s)\, ds$$

berechnen.

Zu dem Zweck fassen wir zunächst den Weg OA_1 ins Auge (vgl. Fig. 3 S. 887). Der dem Endpunkte A_1 dieses Weges vorangegangene Knickpunkt sei B_1 und der zweite Weg OA_2 sei ein solcher, der bis B_1 mit OA_1 gemeinsam verläuft und dann in dem geradlinigen Wegstück B_1A_2 endet. Da die Summen (22) für die beiden Wege OA_1 und OA_2 sich in diesem Falle nur durch das letzte Glied voneinander unterscheiden, so müssen, da ja beide Summen den gleichen Wert A haben sollen, auch diese letzten Glieder miteinander übereinstimmen, d. h. es ist

$$\alpha_{1n_1}s_{1n_1} = \alpha_{2n_2}s_{2n_2};$$

wegen (20) ist daher auch die Linearenergie der beiden Strahlenwege B_1A_1 und B_1A_2 die gleiche. Da überdies in beiden Wegstücken B_1A_1 und B_1A_2 das Licht unmittelbar aus der Emission stammt, ohne Brechung oder Reflexion erlitten zu haben, so ist es natürliches Licht. Nach Annahme 3 vereinigen sich daher diese beiden längs B_1A_1 und B_1A_2 erzeugten Strahlen in B_1 zu einem Strahl natürlichen Lichtes von der gleichen Linearenergie

$$(1 - e^{-\alpha_{1n_1}s_{1n_1}})k.$$

Ferner sei C_1 der B_1 vorangegangene Knickpunkt des Weges OA_1; dann herrscht in C_1 vermöge der beiden Strahlenwege $C_1B_1A_1$ und $C_1B_1A_2$ die Linearenergie

$$\left.\begin{aligned} &\int_{C_1}^{B_1} e^{-\int_{C_1}^{s}\alpha_{1n_1-1}\,ds}\, \eta_{1n_1-1}q^2_{1n_1-1}\,ds \\ &+ e^{-\alpha_{1n_1-1}s_{1n_1-1}}(1 - e^{-\alpha_{1n_1}s_{1n_1}})k \\ &= (1 - e^{-\alpha_{1n_1-1}s_{1n_1-1} - \alpha_{1n_1}s_{1n_1}})k. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Alsdann sei der dritte Weg OA_3 ein solcher, der bis C_1 mit OA_1 und OA_2 gemeinsam verläuft; besteht derselbe von C_1 an aus einem einzigen geradlinigen Wegstücke bis A_3, so ist nach (20) die Linearenergie dieses Wegstückes C_1A_3 in C_1

$$(1 - e^{-\alpha_{3n_3}3n_3})k \qquad (24)$$

und da andererseits wegen der für (22) gemachten Fortsetzung

$$\alpha_{1n_1-1}s_{1n_1-1} + \alpha_{1n_1}s_{1n1} = \alpha_{3n_3}s_{3n_3}$$

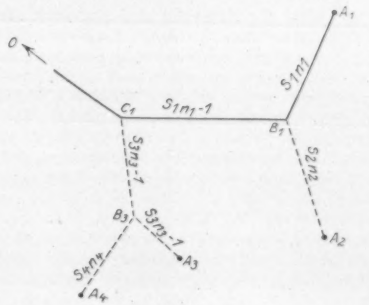

Fig. 3.

ausfällt, so wird diese Linearenergie (24) genau die gleiche wie (23). Da außerdem beide Strahlen nach Annahme 3 von natürlichem Lichte sind, so vereinigen sie sich in C_1 zu einem Strahle, der wiederum nach Annahme 3 natürlichen Lichtes und von der Linearenergie (23) ist. Sollte jedoch der dritte Weg OA_3 von C_1 an noch einen weiteren Knickpunkt B_3 aufweisen, so daß etwa der vierte Weg OA_4 bis B_3 mit OA_3 gemeinsam verliefe, so wenden wir auf diesen letzten Teil des Strahlenweges OA_4 die nämliche Betrachtung wie vorhin auf OA_1 an und erhalten dann, daß die beiden letzten Stücke B_3A_3 und B_3A_4 sich wegen

$$\alpha_{3n_3}s_{3n_3} = \alpha_{4n_4}s_{4n_4}$$

in B_3 zu einem natürlichen Strahl von der Linearenergie (24) vereinigen und demnach in C_1 einen natürlichen Lichtstrahl von der Linearenergie

$$(1 - e^{-\alpha_{3n_3-1}s_{3n_3-1} - \alpha_{3n_3}s_{3n_3}})k \qquad (25)$$

erzeugen. Da wegen der für (22) gemachten Festsetzung nunmehr

$$\begin{aligned} &\alpha_{1n_1-1}s_{1n_1-1} + \alpha_{1n_1}s_{1n_1} \\ &= \alpha_{3n_3-1}s_{3n_3-1} + \alpha_{3n_3}s_{3n_3} \end{aligned}$$

ausfällt, so besitzt jene Linearenergie (25) in C_1 den gleichen Wert (23), wie er im vorigen Falle gefunden worden ist.

Durch Fortsetzung des eingeschlagenen Verfahrens gelangen wir schließlich zu dem

Resultat, daß der auf unseren Wegen OA_i insgesamt erzeugte Strahl in O natürlichen Lichtes ist und dort die Linearenergie

$$(1 - e^{-\alpha_{11}\varepsilon_{11} - \alpha_{12}\varepsilon_{12} - \ldots - \alpha_{1n_1}\varepsilon_{1n_1}})k = (1 - e^{-A})k$$

besitzt. Dieser Ausdruck wird im Limes $A = \infty$ gleich k, somit erhalten wir nach (2) für die Energiedichte

$$u = \frac{k}{q^2 g} = \frac{\eta}{\alpha g}.$$

Damit sind die Aussagen der Axiome C und B, mithin auch die des Axioms A als notwendige Folgerungen aus unseren Annahmen 1, 2, 3 erkannt.

Zugleich ergibt sich der Ausdruck für die Helligkeit eines Strahles, wie er in meiner ersten Mitteilung[1]) abgeleitet wurde, wiederum als gültig, womit insbesondere auch unter voller Berücksichtigung der Reflexion die Tatsache erwiesen ist, daß im Zustande des optischen Gleichgewichts *die Helligkeit an jeder Stelle von der Richtung des Strahles unabhängig ausfällt.* Darüber hinaus zeigt noch unsere Untersuchung, daß im Zustande des optischen Gleichgewichtes *an jeder Stelle jeder Strahl ein Strahl natürlichen Lichtes sein muß.*

Im vorstehenden haben wir zugleich erkannt, *daß die sämtlichen in unseren Axiomen A, B, C, D, D* enthaltenen Aussagen einschließlich der Aussage, daß ein optisches Gleichgewicht für jede Gruppierung der Medien stets möglich ist, sowie der Kirchhoffsche Satz und unser Satz von der Zusammensetzung der Energien bei Reflexion und Brechung, ferner die Formeln für die Energiedichte u und die Helligkeit H ein in sich abgeschlossenes System von Sätzen bildet, die in logischem Zusammenhang miteinander stehen und untereinander widerspruchsfrei sowie mit den Gesetzen der elementaren Optik verträglich sind.*

Aber von diesem erkenntnistheoretischen Gewinn abgesehen, hat uns die obige Untersuchung zugleich in anschaulicher Weise vor Augen geführt, *wie es möglich wird, daß im Zustande des optischen Gleichgewichts die von den verschiedenen Stellen im Raum emittierten, teilweise absorbierten und durch Reflexion und Brechung mannigfach polarisierten Strahlen* — deren Menge schon in den einfachsten Beispielen nicht mehr abzählbar ist — *sich gerade zu einem Strahle von der konstanten Linearenergie $k\cdot(\lambda)$ und von natürlichem Lichte vereinigen und daß so schließlich die Unabhängigkeit der Linearenergie eines Strahles von Ort und Richtung zustandekommt:* auf Grund der in Annahme 3 ausgedrückten Tatsache zeigt sich eben, daß im Zustande des optischen Gleichgewichtes ein Strahl beim Übertritt von einem Körper in einen anderen gerade so viel an Linearenergie durch Reflexion auf der einen Seite verliert als ihm durch Reflexion von der anderen Seite zugute kommt und daß zugleich der Austausch dieser beiden Linearenergien unter solchen Polarisationsverhältnissen stattfindet, daß der durchgetretene Strahl wiederum als natürliches Licht erscheint[1]).

Das Axiom D ist eine spezielle Fassung des Axioms D^*. Es liegt andererseits nahe, auch die folgenden von Axiom D verschiedenen speziellen Fassungen des Axioms D^* in Betracht zu ziehen.

Axiom D'. (Axiom vom Vorhandensein beliebig brechbarer Stoffe.) Es gibt Stoffe derart, daß die Größe q gleich einer willkürlich vorgeschriebenen Funktion der Wellenlänge λ ausfällt.

Axiom D''. (Axiom vom Vorhandensein optisch beliebig durchlässiger Stoffe.) Es gibt Stoffe, welche Strahlen von irgendeiner beliebigen Wellenlänge ungebrochen durchlassen, die Strahlen aller anderen Wellenlängen dagegen total reflektieren.

Das Axiom D'' läßt sich auch als Korollar zu Axiom D' ansehen.

Aus Axiom D'' kann mittels des Axioms A das Axiom B (Axiom vom Ausgleich der Energien jeder einzelnen Farbe) abgeleitet werden.

Um dies zu erkennen, denken wir uns einen Punkt O von einer Kugelschale umgeben und diese Kugelschale von einem Stoffe verfertigt, der für die Strahlen von der Wellenlänge λ_0 die in Axiom D'' ausgedrückte Eigenschaft hat. Für die von λ_0 verschiedenen Werte der Wellenlänge λ ergibt sich dann wegen der totalen Reflexion an der inneren Fläche der Kugelschale sofort

$$\sum_0^\infty P e^{-\int_0^s \alpha(s)\,ds} \eta(s) q^2(s) ds = \frac{\eta q^2}{\alpha} = k(\lambda)$$

1) Vgl. diese Zeitschrift **13**, 1063, 1912. Neuerdings hat Levi-Civita die Formel für die Helligkeit auf neuem Wege abgeleitet. Rend. d. R. Accademia dei Lincei 1914, S. 12.

1) Eine vollkommenere Bestätigung konnte die von mir in meiner zweiten Mitteilung (Göttinger Nachrichten 1913, S. 416 und Anmerkung 1, sowie diese Zeitschr. **14**, 592, 1913 und Anmerkung 3) ausgesprochene und axiomatisch formulierte Auffassung von der Rolle, die die Reflexion im Zustande des optischen Gleichgewichts spielt, kaum erfahren; ist doch der Fall des kontinuierlich veränderlichen Mediums nichts anderes als ein Grenzfall des von mir hier betrachteten Systems homogener Körper. Die an meiner Bemerkung geübte Kritik von Herrn E. Pringsheim (l. c., diese Zeitschr. **14**, 849, 1913) ist daher sachlich ebenso verfehlt, wie sie der Form nach unangebracht war.

und infolgedessen wird nach (2) für alle diese Werte λ die Strahlungsdichte u gleich $\frac{\eta}{\alpha g}$. Daher erhält für dieselben Werte λ der Integrand (4) den Wert Null und die Gleichung (4) verlangt mithin, daß der Integrand auch für $\lambda = \lambda_0$ verschwindet, d. h. es gilt für $\lambda = \lambda_0$ notwendig

$$\eta = g \alpha u,$$

und da λ_0 ein beliebiger Wert von λ ist, so enthält diese Gleichung die vollständige Aussage des Axioms B für das ursprünglich zugrunde gelegte beliebige optische System.

Wie aus Axiom B der Kirchhoffsche Satz folgt, ist oben (§ 2) gezeigt worden.

(Eingegangen 18. September 1914.)

Ein Beispiel für die Kirchhoffschen Stabgleichungen.

Von Max Karl Grober.

Die Ableitung der Kirchhoffschen Gleichungen für den allgemeinen Fall der Stabbiegung ist im 56. Band 1860 des Crelleschen Journals gegeben[1]). Das Studium dieser Abhandlung ist nicht gerade leicht und ich verweise deshalb auf Loves Darstellung[2]) und besonders auf die von Lorenz[3]), in seinem Lehrbuch der technischen Physik. Hier findet man auch eine Anwendung der Gleichungen auf die Verwindung eines Drahtes zu einer Schraubenlinie. Da Lorenz in der Anmerkung schreibt: „Die Kirchhoffschen Stabgleichungen wurden außerdem noch von Reißner benutzt ....", so darf man wohl annehmen, daß in der Litteratur ihre Verwendung selten ist. Hierauf wurde ich von Herrn Reißner aufmerksam gemacht, der mir zugleich einige von ihm begonnene Rechnungen zur weiteren Bearbeitung gab. Es handelt sich um einen an einer Seite eingespannten Balken, an dessen freiem Ende eine Kraft G wirkt; es fragt sich:

Wann kippt dieser Balken aus?

Diese Frage ist von Michell[4]) und Prandtl[5]) unabhängig voneinander fast gleichzeitig unter bestimmten Annahmen gelöst worden. Beide Bearbeitungen gehen von geometrischen Betrachtungen aus, die nach Reißner[6]) überflüssig sind, da sie schon in den Kirchhoffschen Gleichungen vorweggenommen sind und deren „Annäherungsvoraussetzungen undurchsichtig sind." Michell setzt speziell voraus, daß der Quotient aus Torsionsmoment und Biegungsmoment wie „ein kleiner Bruch behandelt werden kann"; das andere Biegungsmoment sei aber dem ersten gleich oder kleiner, jedoch auch noch groß gegen das Torsionsmoment. Ähnliches setzt Prandtl voraus; es seien nämlich „die Ausschläge von vornherein klein gegenüber der Stablänge"; der Quotient der Biegungssteifigkeiten in den beiden senkrechten Richtungen der Hauptachsen sei groß und der Stab soll „schlank genug sein, so daß von dem Einfluß der Schubkraft auf die Durchbiegung abgesehen werden kann."

Die Reißnersche Abhandlung bedient sich nun sogleich der Kirchhoffschen Gleichungen. In diesen sind alle die geometrischen Betrachtungen schon vorher einwandfrei erledigt. Jedoch fehlt bei Reißner die Begründung der Annahme $N_2 = G$ für endliche Torsionswiderstände, aus der sich mehrere Vernachlässigungen ergeben. Es soll deswegen hier eine Durchführung der Aufgabe ohne jede Vernachlässigung erfolgen.

Wir legen das Koordinatensystem so, daß die Achse des Balkens mit der x-Achse zusammenfalle, die Schwerkraft wirke in der z-Achse und senkrecht dazu stehe die y-Achse; der Balken selbst habe die Länge l und es mögen folgende Abkürzungen gelten:

E = Zugelastizitätsmodul des Stabmaterials,
J_1 = das größere Hauptträgheitsmoment,
J_2 = das kleinere Hauptträgheitsmoment,
$A = J_1 E$ = größere Biegungssteifigkeit,
$B = J_2 E$ = kleinere Biegungssteifigkeit,
C = die Torsionssteifigkeit,
$\varkappa, \lambda$ = Krümmungen der Stabachse in den zu den Hauptträgheitsachsen gehörigen Ebenen,
τ = Verdrehungswinkel für die Länge 1,
G = Gewicht am freien Ende,
N_1 = die von einem Querschnitt auf den benachbarten ausgeübte Kraft in Richtung der ursprünglich wagerechten Hauptachse,
N_2 = dieselbe Kraft in Richtung der ursprünglich senkrechten Hauptträgheitsachse,
T = dieselbe Kraft in der Stabachse.

Mit diesen Bezeichnungen lauten die Kirchhoffschen Gleichungen folgendermaßen:

$$\frac{dN_1}{ds} - N_2 \tau + T \lambda = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{dN_2}{ds} - T \varkappa + N_1 \tau = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{dT}{ds} - N_1 \lambda + N_2 \varkappa = 0, \qquad (3)$$

1) Vgl. auch Kirchhoff, Mechanik. Vorl. 27.
2) Love, Lehrbuch der Elastizität, K. 19, S. 459 ff.
3) Lorenz, Lehrbuch der technischen Physik, Bd. 4.
4) Michell, A. G. M. Phil. Mag. Sept, 1899.
5) Prandtl, Diss. 1899.
6) Reißner, Sitzb. d. Berl. Math. Ges. 3. 53, 1904.

$$A\frac{d\varkappa}{ds}-(B-C)\lambda\tau=N_2, \quad (4)$$

$$B\frac{d\lambda}{ds}-(C-A)\tau\varkappa=-N_1, \quad (5)$$

$$C\frac{d\tau}{ds}-(A-B)\varkappa\lambda=0. \quad (6)$$

Solange der Stab in der Ebene bleibt, sind die Größen τ, λ und $N_1=0$. Wollen wir nun den Fall des Auskippens betrachten, so sind diese Größen als von Null verschieden anzunehmen, jedoch so, daß ihre Produkte und höheren Potenzen vernachlässigt werden können. Dann erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\frac{dN_1}{ds}-N_2\tau+T\lambda=0, \quad (7)$$

$$\frac{dN_2}{ds}-T\varkappa=0, \quad (8)$$

$$\frac{dT}{ds}+N_2\varkappa=0, \quad (9)$$

$$A\frac{d\varkappa}{ds}=N_2, \quad (10)$$

$$B\frac{d\lambda}{ds}-(C-A)\tau\varkappa=-N_1, \quad (11)$$

$$C\frac{d\tau}{ds}-(A-B)\varkappa\lambda=0. \quad (12)$$

Nehmen wir an, $\varkappa$ sei irgendwoher bekannt, dann ergibt sich aus (10)

$$N_2=A\frac{d\varkappa}{ds}$$

und somit aus (8)

$$T=\frac{\frac{dN_2}{ds}}{\varkappa}=\frac{A\frac{d^2\varkappa}{ds^2}}{\varkappa},$$

weiter aus (7)

$$\frac{dN_1}{ds}=\tau A\frac{d\varkappa}{ds}-\frac{A}{\varkappa}\cdot\lambda\cdot\frac{d^2\varkappa}{ds^2};$$

aus (12)

$$\lambda=\frac{C}{A-B}\frac{\frac{d\tau}{ds}}{\varkappa} \quad (13)$$

in die vorige Gleichung substituiert;

$$\frac{dN_1}{ds}=\tau\cdot A\frac{d\varkappa}{ds}=\frac{A}{\varkappa^2}\cdot\frac{C}{A-B}\cdot\frac{d\tau}{ds}\cdot\frac{d^2\varkappa}{ds^2}. \quad (14)$$

Differentiere ich nun (11) und substituiere (13) und (14), so ergibt sich

$$\varkappa^2\frac{d^3\tau}{ds^3}-2\varkappa\frac{d\varkappa}{ds}\frac{d^2\tau}{ds^2}-\frac{d\tau}{ds}\left[\varkappa\frac{d^2\varkappa}{ds^2}\left(1+\frac{A}{B}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{(c-A)(A-B)}{B\cdot C}\varkappa^4-2\left(\frac{d\varkappa}{ds}\right)^2\right]+$$
$$+\tau\varkappa^3\frac{d\varkappa}{ds}(2A-)=0. \quad (15)$$

Diese Gleichung gilt für alle möglichen Belastungen. Setze ich z. B. $\varkappa=$ const, so erhalte ich die Gleichung wie ich sie diese Ztschr. 15, 460ff., 1914 behandelt habe, nämlich den Fall, daß am Ende ein Moment wirkt.

Die Naviersche Theorie sagt nun, daß $A\varkappa=Gx$ ist. Ich setze $\frac{A}{G}=a^2$; $[L^2]$[1]). (16)

Diese Gleichung ausgeschrieben, lautet

$$\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}=\frac{a^2}{x}$$

und gibt

$$dy=\frac{x^2+2a^2c}{\sqrt{4a^4-(x^2+2a^2c)^2}}dx, \quad (17)$$

somit

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{2a^2dx}{\sqrt{4a^4-(x^2+2a^2c)^2}}$$

und wenn ich (16) $x=a\varkappa$ substituiere

$$=\frac{2d\varkappa}{\sqrt{\frac{4}{a^4}(1-c^2)-\frac{4c}{a^2}\varkappa^2-\varkappa^4}}. \quad (18)$$

Diesen Wert hätte ich ohne weiteres aus den Kirchhoffschen Gleichungen ableiten können. Ich sagte oben, daß für das ebene Problem τ, λ und N_1 verschwinden; dann erhalte ich also

aus (2) $$\frac{dN_2}{ds}-T\varkappa=0, \quad (19)$$

aus (3) $$\frac{dT}{ds}+N_2\varkappa=0, \quad (20)$$

aus (4) $$A\frac{d\varkappa}{ds}=N_2. \quad (21)$$

Eliminiere ich $\varkappa$ aus (19) und (20), so erhalte ich

$$N_2dN_2+T_2dT=0,$$
$$N_2^2+T^2=G^2,$$

wie sofort ersichtlich; also kann ich (19) schreiben:

$$\frac{dN_2}{ds}=\varkappa\sqrt{G^2-N_2^2},$$

und mit (21):

$$A\frac{d^2\varkappa}{ds^2}=\varkappa\sqrt{G^2-A\left(\frac{d\varkappa}{ds^2}\right)^2}; \quad (22)$$

mit obiger Bezeichnung

$$\frac{a^2\varkappa''}{\sqrt{1-a^4\varkappa'^2}}=\varkappa.$$

1) $a^2=\frac{A}{G}=\frac{E\cdot\mathcal{J}\cdot l}{M\cdot l}=\frac{E\cdot\mathcal{J}\cdot l\cdot e}{M\cdot l\cdot e}=$
$=\frac{E\cdot l\cdot e}{\sigma}\sim\frac{10^6\cdot10^2\cdot10}{10^3}\sim10^6.$

Durch Multiplikation mit $2x'$ und Integration folgt

$$-\sqrt{1-a^4x'^2}=\frac{a^2x^2}{2}+c.$$

Quadriert und umgeformt, folgt

$$x'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{a^4}(1-c^2)-\frac{4cx^2}{a^2}-x^4}$$

oder

$$ds=\frac{2\,dx}{\sqrt{\frac{4}{a^4}(1-c^2)-\frac{4cx^2}{a^2}-x^4}},$$

d. i. der Wert (18). Also

$$ds=\frac{2\,dx}{\sqrt{\left(\frac{2}{a^2}(1-c)-x^2\right)\left(\frac{2}{a^2}(1+c)+x^4\right)}}=$$

$$\frac{2\,dx}{\frac{2}{a}\sqrt{1-c^2}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{\frac{2}{a^2}(1-c)}\right)\left(1+\frac{x^2}{\frac{2}{a^2}(1+c)}\right)}}. \qquad (18')$$

Nun substituiere ich $ax=z\sqrt{2(1-c)}$:

$$ds=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{1+c}}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(1+\frac{1-c}{1+c}z^2\right)}}.$$

Über den Wert c kann ich aus der Lehre von der elastischen Linie aussagen. Für hier kommen nur in Betracht

$$-1\leqq c\leqq 1,$$

so daß also $\frac{1-c}{1+c}$ zwischen $+\infty$ und o liegt, also gesetzt werden kann $=\operatorname{tg}^2\vartheta$.

Aus $\operatorname{tg}^2\vartheta=\frac{1-c}{1+c}$ folgt $\sin^2\vartheta=\frac{1-c}{2}$, $\cos^2\vartheta=\frac{1+c}{2}$.

Nun ist aber, wenn ich $z=\sin\varphi$ setze:

$$\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{1+c}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\vartheta\sin^2\varphi}}=$$

$$\cos\vartheta\,\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{1+c}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\vartheta\sin^2\varphi}}=$$

$$a\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\vartheta\sin^2\varphi}}$$

somit

$$\frac{s}{a}=\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\vartheta\sin^2\varphi}}$$

und somit endlich

$$x=\frac{z}{a}\sqrt{2(1-c)}$$

$$=\frac{\sqrt{2(1-c)}}{a}\operatorname{sn}\frac{s}{a}=A_1\operatorname{sn}\frac{s}{a},$$

wobei $A_1=\frac{\sqrt{2(1-c)}}{a}$ ist. (23)

Für unsere Gleichung (15) brauchen wir nun x^2, xx', xx'', x'^2, ...

Allgemein läßt sich nun diese Gleichung nicht mehr behandeln; da aber $\frac{s}{a}$ eine kleine Zahl ist, nämlich kleiner als 10^{-1}, so konvergiert die Reihe sehr stark. Es ist ja

$$x=A_1\left|\frac{s}{a}-\frac{s^3}{a^3}\cdot\frac{1+k^2}{3!}+\frac{s^5}{a^5}\cdot\frac{1+14k^2+k^4}{5!}-\ldots\right|.$$

Berücksichtige ich die Glieder bis $\frac{s^4}{a^4}$ [um den Einfluß der Glieder x^4 und x^3x' zu haben], so lautet unsere Gleichung nach einigen Umformungen

$$\left|s^2-\frac{s^4}{3a^2}(1+k^2)\right|\frac{d^2\tau}{ds^2}-2\left\{s-\frac{s_2}{a^2}\frac{2}{b}(1+k^2)\right|\frac{d^2\tau}{ds^2}-$$

$$\left[Ls^4+\frac{s^2}{a^2}(1+k^2)-2\right]\frac{d\tau}{ds}+\tau s^3M=0, \qquad (24)$$

wobei

$$L=\frac{(C-A)(A-B)}{B\cdot C}\cdot\frac{A_1^2}{a^2}-\frac{7+26k^2+7k^4}{6a^4}+$$

$$\frac{1+8k^2+k^4}{3a^2}\left(1+\frac{A}{B}\right)$$

und

$$M=\frac{(2A-C)A_1^2}{a^2}\quad\text{ist.}$$

Setzt man nunmehr τ als Potenzreihe von s an, so bestimmen sich die Koeffizienten gliedweise und man erhält

$$\left.\begin{aligned}\tau=c_2s^2\Big[1-\frac{2}{3}\frac{1+k^2}{a^2N(2)}s^2+\\ \frac{2}{3}\cdot4\cdot\frac{(1+k^2)(1+k^2)s^4}{a^4N(4)N(2)}+\frac{(M-2L)s^4}{N(4)}-\ldots\Big]\\ +c_3s^3\Big[1-\frac{3(1+k^2)}{a^2N(3)}s^2+\\ 3\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{(1+k^2)(1+k^2)s^4}{a^4N(5)N(3)}+\frac{(M-3L)s^4}{N(5)}-\ldots\Big]\end{aligned}\right| \qquad (25)$$

Zur Bestimmung von c_2 und c_3 haben wir folgende Anfangsbedingungen:

Es ist für

$$s=l\qquad\lambda=0\quad\text{und}\quad N_1=0;$$

$\lambda=0$ sagt aber nach (12), daß

$$\tau'=0\quad\text{ist.} \qquad (26)$$

$N_1 = 0$ bedeutet nach (11)

$$B\frac{d\lambda}{ds} - (C-A)\tau\varkappa = 0,$$

da aber

$$B\frac{d\lambda}{ds} = \frac{BC}{A-B}\cdot\frac{\frac{d^2\tau}{ds^2}\varkappa - \frac{d\tau}{ds}\cdot\frac{d\varkappa}{ds}}{\varkappa^2}$$

ist, so folgt

$$\frac{BC}{A-B}\cdot\frac{d^2\tau}{ds^2}\varkappa - (C-A)\tau\varkappa^3 = 0 \quad \text{für } s = l$$

oder

$$\frac{1}{\varkappa^2}\cdot\frac{BC}{(A-B)(C-A)}\cdot\frac{d^2\tau}{ds^2} - \tau = 0. \qquad (27)$$

Führt man in diese Anfangsbedingungen (26) und (27) den Wert (25) ein, so erhält man zur Bestimmung von c_2 und c_3 zwei homogene Gleichungen, die aussagen, daß c_2 und c_3 im allgemeinen verschwinden. Wird aber die Determinante des Nenners Null, so wird c_2 durch c_3 ausdrückbar. Der sich hieraus ergebende Wert liefert mir dann die Bedingung des Auskippens für den Balken. Diese Bedingung schreibt sich sehr umständlich. Ich werde, sobald dies möglich, einige numerische Fälle berechnen und an Experimenten prüfen.

Zusammenfassung.

Aus den allgemeinen Kirchhoffschen Stabgleichungen läßt sich ohne jede Vernachlässigung die Differentialgleichung aufstellen, für das Kippproblem bei verschiedenen Belastungen (Gleichung 15). Wirkt am Ende des eingespannten Balkens eine Kraft, so gelingt es leicht, die aus der Navierschen Theorie sich ergebende Beziehung zwischen Krümmung und Bogen auch aus den Kirchhoffschen Gleichungen herzuleiten (Identität von 18 und 18'). Wenn auch die Endformeln allgemein geschrieben sehr umständlich aussehen, so ist doch aber das Kippproblem für den Balken im weitesten Sinne erledigt.

(Eingegangen 30. September 1914.)

Ein System von Wellenzahlen im Scandiumspektrum.

Von Emil Paulson.

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich auf einige Gesetzmäßigkeiten im Bau der Spektren von Scandium, Yttrium, Lanthan und Lutetium hingewiesen. Diese Grundstoffe bilden, wie bekannt, die erste Reihe in der III. Gruppe des periodischen Systems.

Eine spätere, mehr eingehende Untersuchung[1]) über das Y-Spektrum hat gezeigt, daß sich eine Gruppe von vier zusammengehörigen Linien vielmals wiederholt. Bezeichnet man mit A die Wellenzahl der ersten Linie jeder Gruppe, so lassen sich die Wellenzahlen B, C und D der übrigen Linien derselben Gruppe auf folgende Weise ausdrücken:

$B = A + 1846{,}91$	$\Delta_1 = 1846{,}91$
$C = A + 2251{,}69$	$\Delta_2 = 404{,}78$
$D = A + 2456{,}65$	$\Delta_3 = 204{,}96.$

Δ_1, Δ_2 und Δ_3 geben die Differenzen zwischen den Wellenzahlen benachbarter Linien derselben Gruppe an.

Auch für Lutetium[2]) ist das Vorkommen einer ähnlichen Gruppe festgestellt, die jedoch nur viermal, und zwar lückenhaft auftritt, was der Linienarmut dieses Spektrums zugeschrieben werden möchte. Wie oben kann diese Gruppe dargestellt werden durch:

$B = A + 5571{,}42$	$\Delta_1 = 5571{,}42$
$C = A + 7335{,}75$	$\Delta_2 = 1764{,}33$
$D = A + 9552{,}78$	$\Delta_3 = 2217{,}03.$

Als Fortsetzung dieser Untersuchungen wird hier unten ein System von regelmäßig gelagerten Linien im Scandiumspektrum gegeben. Die zu erwartende Gruppe enthält hier nicht weniger als sieben Linien, deren Darstellung in der früher erwähnten Weise ist:

$B = A + 158{,}77$	$\Delta_1 = 158{,}77$
$C = A + 474{,}18$	$\Delta_2 = 315{,}41$
$D = A + 577{,}73$	$\Delta_3 = 103{,}55$
$E = A + 717{,}71$	$\Delta_4 = 139{,}98$
$F = A + 2298{,}81$	$\Delta_5 = 1581{,}10$
$G = A + 2380{,}75$	$\Delta_6 = 81{,}94.$

Die Ergebnisse der Untersuchung werden in den zwei nachstehenden Tabellen niedergelegt, zu deren Erläuterung folgende kurze Angaben genügen möchten. I bezeichnet die Intensität der Linien (zumeist möglichst nach Exner und Haschek). In den Kolumnen A, B usw. sind die Wellenzahlen der Linien eingetragen, deren Differenzen unter Δ_1, Δ_2 usw. angeführt sind. In Tab. I findet man sämtliche Gruppen, welche drei oder mehr Linien enthalten, während alle Paare in Tab. II gesammelt sind.

Alle gemessenen Bogenlinien, im ganzen 440, wurden bei der Untersuchung aufgenommen. In den obigen Tabellen findet man ungefähr die Hälfte davon (203) wieder und darunter die meisten stärkeren Linien des Spektrums.

1) Beiträge zur Kenntnis der Linienspektren. Lund 1914.

1) On the Spectrum of Yttrium. Wird in Astr. Journ. erscheinen.

2) Constant Differences in the Line-Spectra. Astr. Journ. Okt. 1914.

Tabelle I.

	I	A	$\Delta_1 =$ 158,77	I	$B=A$ +158,77	$\Delta_2 =$ 315,41		$C=A$ +474,18	$\Delta_3 =$ 103,55	I	$D=A$ +577,73	$\Delta_4 =$ 139,98	I	$E=A$ +717,71	$\Delta_5 =$ 1581,10	I	$F=A$ +2298,81	$\Delta_6 =$ 81,94	I	$G=A$ +2380,75
	20	27449,98				474,32	10	27924,30	103,47	20	28027,77									
	10	27382,18	158,97	20	27541,15	315,48	10	27856,63	103,44	20	27960,07	140,16	20	28100,23	1721,04	10	29748,81	82,44	2	29831,25
	3	27272,63	158,45	15	27431,08				418,87	15	27849,95	139,86	30	27989,81	1581,03	15	29681,26	82,06	10	29763,32
	6	24908,58	159,23	1	25067,81				418,73	1	25486,54				1721,08	2	27207,62	1663,28	20	29653,09
	20	22646,06	159,00	3	22805,12	315,09	20	23120,21	103,79	8	23224,00							82,05	2	27289,67
	3	22565,62	158,39	20	22724,01				418,89	20	23142,90	140,31	5	23283,21						
	1	21364,33				473,88	1	21838,21	103,89	3	21942,10							1802,63	1	23664,38
	2	21283,48							578,27	4	21861,75									
				1	21188,69							558,39	1	21747,08	1580,84	1	23327,92			
	1	20656,72				473,85	2	21130,57	103,06	3	21233,63									
	1	20447,64	158,68	2	20606,32	315,98	3	20922,30				243,88	1	18417,39						
				1	18976,59	315,32	2	18661,27				140,13	2	18602,85	1581,96	2	20184,81	81,49	2	20266,30
											18462,72	717,53	3	17638,98				1662,50	3	15976,48
	0	18356,51													1720,90	1	20436,52			
				1	18296,79				418,83	1	18715,62									
				4	18134,31				418,94	1	18553,25	140,12	3	18693,37				1662,74	1	15760,29
				0	17981,28							558,25	0	17423,03						
	0	17662,04							578,15	4	18240,19				1721,16	2	19961,35			
	1	16132,45				473,54	0	16605,99							1824,61	1	18430,00			
							2	15922,45	103,19	2	16025,64				1720,27	2	17745,91			
							1	15820,03	103,56	2	15923,59				1721,25	2	17644,84	81,95	3	17726,79
										2	15670,26	139,14	1	15815,40				1663,45	0	17478,85
				1	15532,05	315,53	2	15847,58							1824,76	2	17672,34			
				1	15451,99				418,73	1	15870,72	139,96	5	16010,68	1581,30	3	17591,98	81,71	4	17673,69
												243,85	1	14885,51	1581,12	2	16466,63			
							2	14641,66												
Mittel: [1]		$B-A=$	158,77		$C-B=$	315,48		$D-C=$	103,51		$E-D=$	139,95		$F-E=$	1581,15		$G-F=$	81,95		
					$C-A=$	474,12		$D-B=$	418,89		$E-C=$	243,78		$F-D=$	1721,12		$G-E=$	1663,00		
								$D-A=$	577,82		$E-B=$	558,91		$F-C=$	1824,54		$G-D=$	1803,11		
											$E-A=$	717,51		$F-B=$	2139,36		$G-C=$	1906,72		
														$F-A=$	2298,88		$G-B=$	2221,98		
																	$G-A=$	2380,64		

1) Diese Mittel sind berechnet aus allen bei Kombination entstehenden Differenzen gleicher Art. Die Zahlen in der oberen Zeile sind Mittel dieser Mittel.

Tabelle II.

B—A						*E—D*							*F—C*					
158,77	1	15633,26	158,34	1	15791,60	139,95	2	17490,13	140,18	8	17630,31	1824,54	4	15591,87	1825,00	1	17416,87	
	1	10503,73	158,45	4	10752,18		0	17569,90	139,94	1	17709,84	*F—B*						
	1	10525,15	158,88	0	10684,03		1	19926,03	139,79	1	20065,82	2139,86	0	15878,06	2140,28	0	18018,34	
	1	10919,09	159,18	2	20078,27		1	20487,80	139,68	2	20627,57		2	17516,79	2139,92	2	19656,71	
	1	21198,97	158,65	1	21357,62		1	22855,48	140,06	2	22995,54	*F—A*						
C—B							1	32754,13	140,29	1	32894,42	2298,88	10	28281,42	2298,88	5	30580,30	
315,48	1	15616,83	315,37	1	15932,40	*E—C*						*G—F*						
	1	18768,59	315,38	3	19083,97	243,78	3	15910,77	243,44	1	16154,21	81,95	2	19645,08	81,58	1	19727,56	
	1	20051,09	315,71	1	20366,80		0	20101,00	243,33	4	21144,33		3	20662,73	81,92	2	20744,65	
	2	24539,10	315,75	1	24854,85	*E—B*						*G—E*						
C—A						558,91	1	15473,02	558,55	1	16031,55	1663,03	1	16698,08	1662,64	2	18360,72	
474,12	1	17758,10	474,11	3	18232,21		1	17796,07	559,10	1	18205,87	*G—D*						
	1	20105,19	473,70	0	20578,89							1803,11	1	27339,20	1802,57	1	29141,77	
D—C						*E—A*						*G—C*						
103,51	2	17780,68	103,45	1	17884,13	717,51	4	15140,32	717,74	10	15858,06	1906,72	1	17969,13	1906,72	5	19875,85	
	1	18010,01	103,01	4	18113,02		0	17948,55	717,36	1	18665,91		1	18330,13	1906,60	1	20236,73	
	1	19566,22	103,60	4	19669,82		1	18840,09	717,71	1	19557,80		1	21056,40	1906,81	3	22963,21	
	1	20554,98	103,40	1	20658,38		1	29996,97	717,36	3	30714,33	*G—B*						
	2	24587,24	103,57	2	24690,81		1	32737,83	717,02	2	33455,45	2221,98	2	15248,14	2221,24	2	17469,38	
D—B						*F—E*							2	20714,74	2222,04	1	22936,78	
418,89	1	18273,45	418,56	1	18692,01	1581,15	2	16964,01	1581,03	3	18545,04		5	21122,45	2221,91	1	23347,36	
	2	19191,28	418,83	3	19610,11		0	17435,48	1581,31	2	19016,79	*G—A*						
	2	20254,03	418,81	2	20672,84		2	18005,56	1580,78	2	19586,34	2380,64	1	21771,55	2380,59	5	24152,14	
	2	20687,40	419,31	5	21106,71		2	18918,21	1580,65	1	20498,86							
D—A						*F—D*												
577,82	1	18343,41	577,53	1	18920,04	1721,12												
	1	20379,59	577,43	1	20957,02													

Es gibt aber auch Linien, welche auf andere Weise gesetzmäßig zusammenhängen, z. B.

(30) 27989,81		(20) 24871,91		
(30) 27670,17	319,64	(30) 24851,63	20,38	
(30) 23178,68		(30) 25562,17		
(20) 22858,76	319,92	(30) 25542,19	19,98	
		(10) 29763,32		
		(10) 29743,14	20,18	

deren Zusammengehörigkeit wohl nicht bezweifelt werden kann, obwohl die beiden Linien 27981,81 und 29763,32 bereits im früher gegebenen System eingeordnet sind. Es gibt übrigens noch mehrere Linien mit geringerer Intensität, die Paare mit diesen Differenzen bilden. Vielleicht liegen hier Anfänge zu Serien vor. Eine Prüfung der magnetischen Aufspaltung dieser Linien wäre sehr interessant.

Eine weitere Aufgabe besteht nun in der Aufsuchung des Wellenzahlensystems bei Lanthan[1]), um später mögliche Beziehungen der vier verschiedenen Systeme zu entdecken. Die Tatsache, daß sich die Differenzen im allgemeinen mit steigenden Atomgewichten vergrößern, braucht wohl nicht besonders bemerkt werden.

Lund, im September 1914.

(Eingegangen 25. September 1914.)

1) Zusatz bei der Korrektur: In diesem Spektrum ist später eine Gruppe von 6 Linien, welche sich 17 mal ziemlich vollständig wiederholt, entdeckt worden. Mit früher gebrauchten Bezeichnungen kann sie folgendermaßen dargestellt werden:

$$B = A + 2977{,}86 \quad \Delta_1 = 2977{,}86$$
$$C = A + 3636{,}85 \quad \Delta_2 = 659{,}00$$
$$D = A + 4333{,}66 \quad \Delta_3 = 696{,}80$$
$$E = A + 5212{,}84 \quad \Delta_4 = 879{,}18$$
$$F = A + 6229{,}16 \quad \Delta_5 = 1016{,}32$$

Näheres hierüber wird in den Ann. d. Phys. veröffentlicht.

Röntgenstrahlung und Ordnungszahlen.

Von A. van den Broek.

In zwei vor kurzem in dieser Zeitschrift (**15**, 753 und 793, 1914) erschienenen Arbeiten: „Über den Zusammenhang zwischen Absorption und Wellenlänge bei Röntgenstrahlen“ und „Quanteneffekt im Hochfrequenzspektrum“ zeigen Manne Siegbahn resp. A. Landé, daß

$$\frac{\mu}{\sigma} = \frac{c}{(N-1)^{2x}} = A\lambda^x \text{ resp. } \varepsilon = h\nu,$$

wo N die Ordnungszahl der Elemente, A und c Konstanten, und $2x$ sehr nahe gleich 6.

Dazu möchte ich folgende Sätze aus früheren Arbeiten[1] zitieren: „Die charakteristische (Röntgen-)Strahlung hängt ab von M (der Ordnungszahl der Elemente) und nicht von A (dem Atomgewichte). Dies wurde von Mosely (Phil. Mag., Dez. 1913, nicht Mosely und Darwin 1913) nachgewiesen für die Elemente von Kalzium bis Zink, scheint aber für alle zu gelten.

Werden die Logarithmen $\mu/\sigma\,(Al)$ gegen die von M in ein Koordinatensystem eingezeichnet, so liegen alle Punkte auf einer geraden Linie

für die „K“. — und auf einer zweiten (parallelen) für die „L“-Strahlung[1]); (siehe Fig.[2])) ..... Die Absorbierbarkeit der charakteristischen Röntgenstrahlung ist ungefähr umgekehrt proportional der sechsten Potenz der Ordnungszahlen (im Mendelejeffschen System)[3]). Die Elektronengeschwindigkeit, zur Erzeugung dieser Strahlung notwendig, nach Widdington gleich $10^{\varrho} \cdot A$, ist genauer gleich $2{,}23 \times 10^{\varrho}\,(M-1)$ .... Da $\nu_k = 2{,}47 \times 10^{15}\,(M-1)^2$, (Moseley), können wir x berechnen aus $xmv^2/2 = h\nu$ und finden $x = {}^3/_4$“.

1—3) van den Broek, Nature, Dez. 1913, March 5 und May 7, 1914.

Gorssel (Niederlande), 19. September 1914.

(Eingegangen 30. September 1914.)

Gleitfunken-Beobachtung an Röntgenröhren.

(Aus dem Laboratorium der Veifa-Werke, Frankfurt a. M., Direktor Friedrich Dessauer).

Von B. Winawer u. F. Pfeiffer.

Gelegentlich zu anderen Zwecken angestellter Versuche mit Röntgenröhren gewannen wir durch einen Zufall überaus schöne Bilder von Funkenverzweigungen an der Außenwand einer Röntgenröhre, die wir in den Figuren 1—3 zur Darstellung bringen. Die Versuchsanordnung bestand in folgendem:

Eine sehr harte Röntgenröhre wurde mit den gleichgerichteten Entladungen eines Hochspannungs-Transformators belastet. Die mit dem Deprèz-d'Arsonval-Instrument abgelesene Milliamperezahl in der Röntgenröhre betrug etwa 1,5 M.-A. Die Röhre war so hart, daß von Zeit zu Zeit von den Außenarmierungen vereinzelte Funken der Röhrenwand entlang verliefen. Auch Überschläge in der freien Luft und auf benachbarte Gegenstände traten während der Dauer der Beobachtung auf. In etwa 8 cm Entfernung von der Röntgenröhre befand sich eine Spule mit hoher Selbstinduktion. Plötzlich entstand durch einen von der Röhre auf die Spule überschlagenden Funken in der Wicklung der Spule ein Kurzschluß. Durch die hohe Selbstinduktion der Spule bildete sich infolge des Kurzschlusses ein ziemlich kräftiger rußender Flammenbogen, der zum Teil von den Isolationsmaterialien der Spule stammte. Die rußende Flamme trübte die Röhrenwand und nach dem Abstellen fanden wir die abgebildeten Funken, welche selten schöne Verästelungen zeigen. Ein Teil der starken Äste geht aus dem rußigen Beschlag der Röhre heraus und entwickelt sich, die äußere Wandung der Röhre überlaufend, in immer feinere Zweige. Einige Funkenbäumchen wachsen aber auch aus Knickstellen der Röhrenglaswand heraus, d. h. aus solchen Stellen, wo Glastuben an die Kugel angesetzt sind, z. B. an dem Rege-

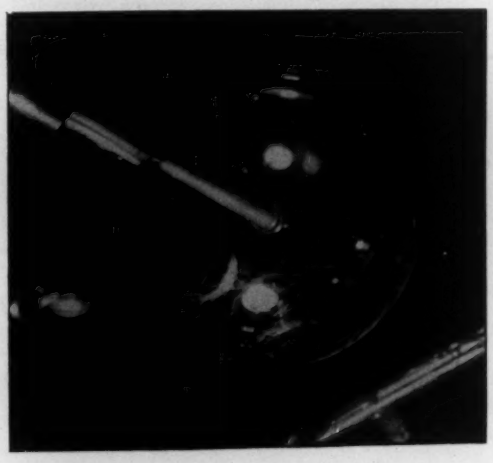

Fig. 1.

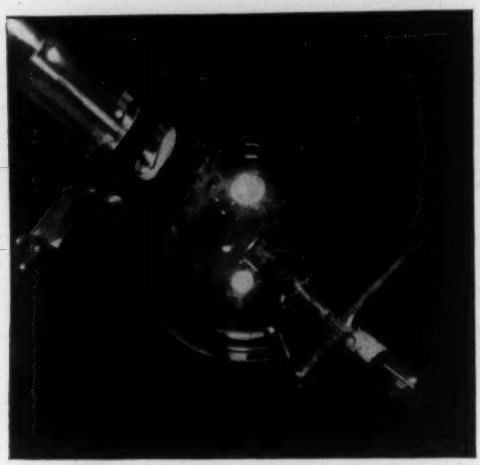

Fig. 2.

nerieransatz oder an dem Ansatz, der die Hilfsanode der Röhre umschließt. Das Phänomen zeigt eine gewisse Ähnlichkeit mit der bekannten Erscheinung der Gleitfunken. (S. z. B. Petersen, Hochspannungstechnik, Stuttgart 1911, S. 35.)

Gleitfunken beobachtet man in der Weise, daß ein gut isolierender Körper, z. B. eine Glasplatte, einseitig metallisch belegt wird und daß etwa auf die Mitte der nicht belegten Seite eine kleine metallische Platte aufgesetzt wird. Lädt man nun die beiden so gegenüberliegenden Metallflächen entgegengesetzt auf, so entsteht zunächst eine „Streifenentladung", die allmählich in ein Gleitbüschel übergeht, aus welchem wiederum der Gleitfunke hervorgeht. Gleitbüschel und Gleitfunken zeigen aber nicht die von uns beobachtete Form bis ins feinste verästelter Bäumchen.

Bei unserem Versuch kann man daran denken, daß die Innenseite der Röhrenkugel den einen der beiden Beläge darstellt, da die Röhre ja während ihres Betriebes im Innern stark

Fig. 3.

Fig. 4.

ionisiert ist. Als anderer Belag käme die Spule mit ihrer Flamme in Frage und es sieht so aus, wie wenn von der Flamme aus ein Teil der Entladungen eingesetzt hätte. Versuche, das Phänomen an Glasplatten zu wiederholen, führten zu den bereits bekannten Gleitfunkenbildern (Fig. 4).

Frankfurt a. M., den 6. Oktober 1914.

(Eingegangen 8. Oktober 1914.)

BESPRECHUNGEN.

Fritz Seemann, Leitfaden der mineralogischen Bodenanalyse. Nebst Beschreibungen der wichtigsten physikalischen Untersuchungsmethoden am gewachsenen Boden. Mit 39 Textabbildungen, 3 Tafeln und 7 Mineralbestimmungstabellen. gr. 8. 106 S. Wien und Leipzig, Wilhelm Braumüller. 1914. Gebunden M. 5.—

Das Buch entstand aus Vorlesungen, die Verf. an der deutschen landwirtschaftlichen Akademie in Tetschen-Liebwerd hielt und mit Übungen verband, und soll dem Agrikulturchemiker dienen. Verf. erwähnt im Vorwort nicht die Bücher von Mitscherlich, Ramann u. a., sondern nur ein 1889 von F. Steinriede geschriebenes Werk und will diesem gegenüber die kristalloptischen Methoden in den Vordergrund stellen, die chemischen aber beiseite lassen.

Nach einigen Kapiteln über die Entnahme der Bodenprobe, über Wasserkapazität, Porenvolumen, Luftkapazität, Durchlässigkeit sowie über mechanische Schlämmanalyse folgen 20 Seiten über optische Erscheinungen, 16 Seiten über Dichte, Härte usw. sowie chemische Reaktionen; auf 40 Seiten werden die einzelnen bodenbildenden Minerale mineralogisch beschrieben.

Ein Büchlein, das lediglich eine kurze Zusammenstellung bekannter und elementarer Dinge enthält, sollte frei von groben Fehlern sein und eine präzise Ausdrucksweise führen. Da liest man nun aber auf S. 36, die Auslöschung sei nur dann gerade, wenn die Kanten des Mineralkornes bei Auslöschung parallel einem Nicolhauptschnitt lägen (hiernach hätte also ein Spaltungsrhomboeder von Kalkspat auf jeder Rhomboederfläche schiefe Auslöschung); die Auslöschung tetragonaler, hexagonaler und rhombischer Minerale wird als stets gerade bezeichnet (S. 36); „bei den monoklinen Mineralen trifft man das Maximum der Auslöschungsschiefe in Partikeln parallel der Symmetrieebene“ (S. 37). Auf S. 58 u. 59 findet sich der fundamentale Irrtum, daß die Volumina zweier Körner in dem gleichen Verhältnis zueinander ständen wie ihre Durchmesser!

Die Ausdrucksweise kann vielfach nur derjenige verstehen, der die Sache zehnmal besser kennt als der Verf. So heißt es S. 35: „Deshalb treten . . . . . in der Richtung der verschiedenen Elastizitätsachsen Farbenunterschiede auf“; das Absorptionsschema „$c > b = a$ bedeutet z. B., daß die Intensität der Farbe in der Richtung c größer ist als in der von b und in letzterer gleich der von a“; S. 37: „die Interferenzfarbe ist . . . . umso größer“; S. 40: „die Lage der relativ größten und kleinsten Lichtgeschwindigkeit“; S. 32: „die Richtungen von ω und ε_1 sind jetzt parallel mit den Armen des Fadenkreuzes“, usw.

Schließlich ist vor allem der ganze Plan des Buches verfehlt. Die schwierigeren Dinge werden als bekannt vorausgesetzt, die einfacheren auseinandergesetzt. Der Begriff des Gangunterschiedes, die Konstruktion des Nicolschen Prismas und die Handhabung des Polarisationsmikroskops sollen dem Leser bekannt sein, demgegenüber wird ihm klar zu machen versucht, wie er festzustellen hat, „in welcher Richtung der untere Nikol das Licht durchläßt“ (S. 35). Auf S. 47 steht in dem achtzeiligen Kapitel über Härte: „Fensterglas hat etwa die Härte 5, ein gutes Messer 6“;

was diese beiden Zahlen bedeuten sollen, ist mit keinem Worte auch nur angedeutet.

Kurzum: Wer das Buch versteht, liest es nicht; wer es liest, versteht es nicht! Cui bono? —

Diejenigen meiner mineralogischen Kollegen aber, die dem Buch Klischees geliehen haben, möchte ich bitten, sich künftig das Manuskript zeigen zu lassen, bevor sie ein Buch mit guten Abbildungen schmücken und dadurch empfehlen. Johnsen.

B. Gossner, Kristallberechnung und Kristallzeichnung. Ein Hilfsbuch der Kristallographie mit Betonung der graphischen Verfahren sowie der analytischen und zonalen Beziehungen. gr. 8. IV u. 128 S. mit 1 Tafel und 109 Abbildungen im Text. Leipzig und Berlin, W. Engelmann. 1914. M. 8.—

Das Buch beginnt mit einer ausführlichen Beschreibung der stereographischen und der gnomonischen Projektion von einfachen und von verzwillingten Kristallen, wobei auch die „Netze" von G. Wulff und F. E. Wright sowie die Transporteure von S. Penfield und von A. Hutchinson erläutert werden. Nach Ableitung der allgemeinen Gleichungen der Kristallberechnung, wobei auch das von Gauß entdeckte und von Liebisch in die rechnende Kristallographie eingeführte rationale Doppelverhältnis benutzt wird, geht Verf. zur Ermittlung von Winkeln, Achsenverhältnissen und Indizes in den einzelnen sieben Kristallsystemen über, indem er in moderner Weise die stereographische Projektion rechnerisch und graphisch zu Hilfe nimmt. Die Parallelprojektion der Kristalle (Kristallzeichnung) wird sowohl aus Naumanns Konstruktion des Achsenkreuzes als auch besonders aus der stereographischen und der gnomonischen Projektion hergeleitet; letztere Verfahren sind ja dem ersteren ganz allgemein, besonders aber bei der Darstellung von Zwillingen, entschieden vorzuziehen; auch die „Kantentreue" (natürliches Längenverhältnis verschiedener Kanten) ist meist schnell zu erreichen.

Das Gossnersche Buch soll u. a. besonders eine Ergänzung zu einer neuen Auflage von Groths Physikalischer Kristallographie darstellen, in welcher die Kapitel über Kristallberechnung und Kristallzeichnung unterdrückt werden sollen. Diesen Zweck wird es sicherlich vollauf erfüllen. Johnsen.

E. A. Wülfing, Die 32 kristallographischen Symmetrieklassen und ihre einfachen Formen. Zweite, gänzlich umgestaltete und erweiterte Auflage der „tabellarischen Übersicht der einfachen Formen der 32 kristallographischen Symmetriegruppen". 48 S. mit 8 Tafeln, 260 Textfig. Berlin, Gebr. Bornträger. 1914.

In der Einleitung wird das für vorliegenden Zweck fundamentale Rationalitätsgesetz, dann die in dem Folgenden zur Veranschaulichung von Symmetrieeigenschaften benutzte stereographische Projektion dargelegt. Nach Einführung der erfahrungsmäßigen Symmetrieelemente der Kristalle (Symmetrieebene, Symmetrieachse, Symmetriezentrum und Drehspiegelungsachse) entwickelt Wülfing unter Benutzung der regulären Kugelteilung in einer für den Nichtmathematiker plausiblen Weise die Möglichkeit von 32 verschiedenen Symmetrieklassen. Aus einem Minimum von Symmetrieelementen, die irgendeine dieser Klassen definieren, werden die übrigen Elemente der betreffenden Klasse hergeleitet. Der vom Verfasser eingeführte Begriff der „Spiegelungsachse" will mir gegenüber „Achse" und „Drehspiegelungsachse" nicht glücklich erscheinen, denn, während beim Vorhandensein einer Drehspiegelungsachse nur die kombinierten Operationen einer Drehung und einer Spiegelung den Kristall zur Deckung mit ihm selbst bringen, gelingt dieses bei Vorhandensein einer „Spiegelungsachse" sowohl durch eine Drehung allein als auch durch eine Spiegelung allein. Übrigens würde dem Begriff der Drehspiegelungsachse das Wort „Spiegelungsachse" genügen, da dem Begriff „Achse" der Begriff „Drehung" ja a priori anhaftet.

Das „Kristallsystem" würde ich als Gesamtheit derjenigen Symmetrieklassen definieren, deren Kristallarten sich auf gleichsymmetrische (statt „gleichartige") Achsenkreuze beziehen lassen. Die Zweiteilung des hexagonalen Systems im weiteren Sinne in „hexagonales" und in „trigonales" System ist — im Hinblick auf die Raumgitterlehre — vielleicht vorteilhaft durch eine Gliederung in „hexagonales" und in „rhomboedrisches" System zu ersetzen.

Das klar und verständlich geschriebene Werkchen wird gewiß gute Dienste leisten, z. B. dem Physiker und dem Chemiker, der zum besseren Verständnis der röntgenspektrometrischen Kristallanalyse sich mit der Symmetrie der Kristalle vertraut machen will. Johnsen.

W. Scheffer, Wirkungsweise und Gebrauch des Mikroskops. 8. IV u. 116 S. mit 89 Abbildungen und 3 Blendenblättern. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner. 1911. Gebunden 3 M.

Es ist leider noch immer keine Seltenheit, daß ein großer Teil der Leute, die mit einem Mikroskop arbeiten müssen, lediglich die Bedeutung der mechanischen Teile und ein paar Handgriffe kennt, aber von der Bildentstehung und der übrigen Wirkungsweise keine Ahnung hat. Um diesem Dilettantismus entgegen zu arbeiten, hat der Verfasser sein Büchlein geschrieben, das in der Tat zur Belehrung wohl geeignet erscheint. Es sei daher bestens empfohlen.

C. Schaefer.

H. v. Sanden, Praktische Analysis. XIX u. 185 S., 30 Figuren. Leipzig, B. G. Teubner. 1914. Geh. M. 3.60, geb. M. 4.20

Vorliegende Arbeit ist der erste Band eines Handbuchs der angewandten Mathematik, welches von H. E. Timerding herausgegeben wird; man kann dem Herausgeber nur wünschen, daß die übrigen Teile des Handbuchs in dem gleichen Maße brauchbare Mathematik bringen! Nach einer eindringlichen, auch für Physiker und Chemiker durchaus nicht überflüssigen Mahnung zur Abfassung ordentlich geführter Rechnungsprotokolle bespricht Verfasser zunächst eingehend die Hilfsmittel der numerischen Rechnung, die Tabellen, die graphischen Hilfsmittel, Rechenschieber und Rechenmaschinen. Den Hauptteil des Buches bilden ausgewählte, bis zum numerischen Resultat an Beispielen durchgeführte Rechenvorschriften für eine Reihe der wichtigsten Operationen, wie z. B. Auflösung von Gleichungen, Interpolation, Quadratur, harmonische Analyse u. a. Besonderer Wert wird darauf gelegt, daß gezeigt wird, wie bei jeder Rechnung der erreichte Grad der Genauigkeit abgeschätzt wird.

G. Rümelin.

A. v. Weinberg, Kinetische Stereochemie der Kohlenstoffverbindungen. gr. 8. 107 S. mit 25 Abbildungen. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1914. M. 3.—, gebunden M. 4.—

Die Versuche, sich aus physikalischen Eigenschaften chemischer Verbindungen ein Bild über den Aufbau der Moleküle zu konstruieren, welches über das der gebräuchlichen Strukturformeln hinausreicht, sind alt. Es geschah znm Teil unter Annahme starr gerichteter Valenzkräfte wie bei Baeyers Spannungstheorie und bei dem Kohlenstofftetraeder von van t'Hoff, teils wurde die Valenz als etwas Verschiebbares angesehen, wie von Thiele, Werner u. a. Die neue Hypothese, deren Konsequenzen der Verfasser des vorliegenden Buches durchführt, ist die Annahme, daß die Atome im Molekül sich in steter Bewegung befinden. Es wird versucht, eine Stereochemie unter Annahme stets bewegter Atome — eine kinetische Stereochemie — zu schaffen. Unter Voraussetzung, daß die Atome in ihren Verbindungen sowohl je nach ihrer Lage im Molekül um verschiedene Achsen rotieren, als auch sich zum Teil in vibrierender Bewegung befinden, gelingt es dem Verfasser, für Verbrennungswärme und Molekularrefraktion Werte zu berechnen, die mit den experimentell gefundenen Daten verblüffend übereinstimmen.

Wenn vielleicht auch die Grundannahmen Weinbergs nicht genügend experimentell gesichert scheinen, so ist ein Buch doch zu begrüßen, daß in so angenehmem, elegantem Stil auf wenigen Seiten soviel Anregung bringt und zur Diskussion anregt, indem es eine große Menge Erscheinungen unter einem Gesichtspunkte zusammenzufassen sucht. F. Bulle.

Berichtigung.

Auf Seite 839, Spalte 1, Zeile 23 von unten muß es statt: „polaren Ringen 1 oder 2" heißen: „polaren Ringen 1 oder 3". E. Gehrcke.

Personalien.

(**Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.**)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Darmstadt (von neuem) Dr. Johann Baerwald (zuletzt Privatdozent an der Universität Heidelberg) für Physik, an der Universität Zürich Dr. M. Wolfke für Physik, an der Deutschen Technischen Hochschule Brünn Dr. Albin Kurtenacker für analytische Chemie, an der Technischen Hochschule Wien Professor Dr. Otto Danzer für darstellende und projektive Geometrie.

Ernannt: Der wissenschaftliche Hilfsarbeiter Dr. Paul Viktor Neugebauer zum Observator am Astronomischen Recheninstitut der Universität Berlin.

Vom Lehramt zurück: Der Privatdozent für Chemie an der Universität München Dr. Jean Felix Piccard, der Observator am Astronomischen Recheninstitut der Universität Berlin in Dahlem Professor Dr. Paul Lehmann.

Gestorben: Der Privatdozent für Meßapparate und Meßmethoden der drahtlosen Telegraphie an der Technischen Hochschule Berlin Professor Dr. Bruno Glatzel, der frühere Professor für Chemie an der Landwirtschaftlichen Hochschule Magyar-Ovár (Ungar.-Altenburg) Dr. Josef Nuricsán, der Observator an der Königl. Sternwarte Berlin-Babelsberg Dr. Julius Liebmann, der Professor der Chemie an der K. K. Kunstgewerbeschule Wien Regierungsrat Dr. Friedrich Linke, der ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule München Dr. Heinrich Burkhardt, der Kustos an der Sternwarte und Privatdozent für Geophysik und Erdmagnetismus an der Universität München Dr. Friedrich Bidlingmaier, der Herausgeber des Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas Dr. Willem Anne van Dorp in Naarden, der Professor der Chemie an der Vanderbilt University William L. Dudley, der a. o. Professor der Mathematik der Böhmischen Technischen Hochschule Prag Dr. Frantisek Velisek.

Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1914/15.

Universität München.

Hartogs: Vorlesung „Determinantentheorie" fällt aus. — **Dingler:** liest nur: Mathematisch-philosophisches Kolloquium, 2. —

Professor Piloty wird event. später ankündigen.

Professor Koch, sowie die Privatdozenten Dr. Schmauß, Bidlingmaier, Pummerer, Meyer, Kalb, Lenz, Piccard lesen nicht.

Akademie Posen.

Spies: Einführung in die Röntgentechnik, 2. — **Könnemann:** Ausgewählte Kapitel aus der Physik der Meteore, Kometen, Fixsterne und Nebelflecke, 1. — (Die physikalischen Vorlesungen wurden eingeschränkt, die chemischen und mathematischen fallen aus.)

Technische Hochschule Stuttgart.

v. Koch: Experimentalphysik: Elektrostatik, Magnetismus, Elektrokinematik, Optik, 4; Theoretische Physik mit mathematischen Ergänzungen zur Experimentalphysik, 2; Übungen im physikalischen Institut (mit Schumm), a) Physikalisches Praktikum, halbtägig, tägl. außer Sonnabend, b) Anleitung zu physikalisch-wissenschaftlichen Arbeiten, tägl.; Handfertigkeits-Praktikum in Physik, für Vorgeschrittene, 2—3; Physikalisches Kolloquium, 2; Meteorologie, ausgewählte Kapitel, 1. — **Veesenmayer:** Grundlagen der Elektrotechnik: Konstruktionen und Anlagen, 2, Übungen, 1; Elektrotechnische Konstruktionselemente (mit Brandegger), 1; Dynamobau I (mit Brandegger), Seminar, 1, Übungen, 6, II, 2; Elektrotechnische Maschinenkonstruktionen (mit Brandegger), 8; Elektrische Betriebe: Elektrische Kraftwerke und Antriebe, 2; Projektieren elektrischer Anlagen (mit Brandegger), Übungen, 4; Übungen in elektrischen Konstruktionen und Anlagen (mit Brandegger), 4. — **Emde:** Grundlagen der Elektrotechnik: Beschreibung des elektromagnetischen Feldes, 2, Übungen, 1; Wechselstromtechnik I, 2, Übungen (mit Spielrein), 8, II, 2, Übungen (mit Spielrein), 4. — **Herrmann:** Elektrische Meßinstrumente und Meßmethoden I, 1, Übungen, 8, II, 1, Übungen, 4; Schwachstromtechnik I, 2, Übungen, 4; Übungen in drahtloser Telegraphie, 4; Grundzüge der Elektrotechnik, 2. —

Gutbier: Anorganische Chemie, 4; Analytische Chemie auf physiko-chemischer Grundlage, 1; Übungen im Laboratorium für anorganische Chemie (mit Schmidt und Huber). — **Küster:** Pharmazeutische Chemie, anorganischer Teil, 2; Chemie der Nahrungsmittel, Genußmittel und Gebrauchsgegenstände, 2; Organisch-chemische Technologie, 2; Übungen im Laboratorium für organische Chemie und Pharmazie (mit Bauer), tägl. außer Sonnabend. — **Grube:** Elektrochemie, 2; Übungen im Laboratorium für Elektrochemie und Technische Chemie. — **Kauffmann:** Farbenchemie unter besonderem Eingehen auf die Chemie mehrkerniger Benzolderivate, 2; Radioaktivität und Elektronik, 1. — **Schmidt:** Analytische Chemie, 2; Einführung in die Stöchiometrie, 1; Chemisches

Seminar, 2. — **Bauer**: Die chemische Untersuchung des Harns mit Übungen, 2; Stereochemie, 1. —

Kutta: Höhere Mathematik II, 5, Übungen, 3, IV, 1, Übungen, 1; Mathematisches Seminar, 2. — **Mehmke**: Darstellende Geometrie (mit Stübler), 3, Übungen, 4; Graphisches Rechnen mit Ergänzungen aus den Gebieten des numerischen und mechanischen Rechnens (mit Stübler), 1, Übungen, 2; Analytische Mechanik (mit Stübler), 3, Übungen, 1; Mathematisches Seminar, 1. — **Haller**: Ebene und sphärische Trigonometrie, 2, Übungen, 2 und 1. — **Stübler**: Niedere Analysis, 4; Elemente der Differential- und Integralrechnung, mit Übungen, 4. — **Wölffing**: Höhere Algebra, 3. — **Kommerell**: Geometrische Transformationen, 2. — **Roth**: Schattenkonstruktionen und Beleuchtungskunde, 4. — **Kriemler**: Technische Mechanik, 6, Übungen, 2. — **v. Hammer**: Ausarbeitung der geodätischen Aufnahmen, 2; Praktische Geometrie (Vermessungskunde) I, 3, Übungen, 6; Geodätische Übungen (mit Heer), 4; Ausgleichungsrechnung: Methode der kleinsten Quadrate, 2; Direkte Zeit- und geographische Ortsbestimmung, mit Übungen, 2. — **Heer**: Plan- und Geländezeichnen, 4. —

Universität Wien.

Nachtrag: **Kohl**: Grundzüge der elektromagnetischen Lichttheorie, 2. — **Schmidt**: Meteorologie der freien Atmosphäre, 1. — **Radon**: Bilineare und quadratische Formen (einschließlich der Elementarteilertheorie und der Formen von unendlich vielen Variablen), 2. —

Die Herren **Hasenöhrl**, **Pollak**, **Wenzel** werden eventuell später ankündigen.

Die Herren **Ehrenhaft**, **Haschek**, **Mache**, **Nabl**, **Kohlrausch**, **Schrödinger**, **Kailan**, **Zellner** werden nicht lesen.

Technische Hochschule Wien.

Jäger: Physik für Bauingenieure, 3; Ausgewählte Kapitel der Physik, 2; Optik für Geodäten, 2. — **Mache**: Physik für Maschineningenieure und Chemiker, 5. — **Liznar**: Meteorologie und die wichtigsten Lehren der Klimatologie, 2. — **Sahulka**: Elektrotechnik, $4^1/_2$, Praktische Übungen I (mit Reithoffer), 4; Elektrotechnische Meßkunde, 2. — **Reithoffer**: Enzyklopädie der Elektrotechnik, 2; Elektrische Schwingungen und Wellen, 2. — **N. N.**: Dynamobau, $5^1/_2$, Konstruktionsübungen, 6; Elektrotechnik, Praktische Übungen II, 4. — **Hochenegg**: Elektrische Arbeitsübertragung, 3; Bau und Betrieb elektrischer Anlagen einschließlich Stromverteilung, 2, Übungen, 4. — **Jüllig**: Elektrische Telegraphie und Eisenbahn-Signalwesen, 2. — **Zelisko**: Die Fernsprechtechnik, 2; Die Telegraphentechnik, 1. —

Bamberger: Allgemeine Experimentalchemie I: Anorganische Chemie, 6, Übungen, tägl. — **Suida**: Allgemeine Experimentalchemie II: Organische Chemie II, 4; Die wichtigsten Kapitel aus der Chemie der aromatischen Verbindungen, 4; Chemische Technologie organischer Stoffe, 5, Übungen, tägl. außer Sonnabend. — **Vortmann**: Analytische Chemie, 4, Übungen, tägl. — **Moser**: Qualitative chemische Analyse, 2. — **v. Jüptner**: Theoretische und physikalische Chemie II, 2, Übungen, 4; Chemische Technologie anorganischer Stoffe, 5, Übungen, tägl. außer Sonnabend; Technische Feuerungen, 5. — **Praetorius**: Physikalisch-chemisches Messen und Rechnen, 1. — **Lafar**: Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 2. — **Böck**: Chemie der synthetischen organischen Arzneimittel, 2. — **Klimont**: Chemie der hydroaromatischen Verbindungen und Terpene, 2. — **Paweck**: Technische Elektrochemie, 3. — **Ulzer**: Technische Analyse organischer Stoffe, 2. — **Eder**: Photochemie und angewandte Photographie, 1; Photographisches Praktikum, 4. — **Abel**: Katalyse, 2. — **Strache**: Beleuchtungsindustrie, 2, Übungen, 4. — **Erban**: Chemische Textilindustrie I, 2. — **Ruß**: Neuere Verfahren der anorganisch-chemischen Großindustrie, $1^1/_2$. — **Strunz**: Geschichte der Naturwissenschaften und der Naturbetrachtung in der Renaissance und Neuzeit I, 2; Geschichte der Chemie und Alchemie, 2, Übungen, 2. —

Zsigmondy: Mathematik I, für Maschineningenieure, 5, Korrepetitionen, 2. — **Rothe**: Mathematik I, für Bauingenieure, 5; Ausgewählte Kapitel aus der höheren Mathematik, 2. — **Czuber**: Mathematik II, 5, Korrepetitionen, nach Vereinbarung; Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3. — **Suppantschitsch**: Elemente der höheren Mathematik, 4, Übungen, 1. — **N. N.**: Enzyklopädie der Mathematik, 3. — **Tauber**: Versicherungsmathematik I, 4, II, 2. — **Förster**: Politische Arithmetik, 2. — **Blaschke**: Einführung in die mathematische Statistik, 3. — **Müller**: Darstellende Geometrie und konstruktives Zeichnen für Bauingenieure, 5, Konstruktionsübungen, 6, Seminar, 2; Konstruktive Behandlung der Schraub- und Schiebflächen, 2, Konstruktionsübungen, 2. — **Schmid**: Darstellende Geometrie und konstruktives Zeichnen für Maschineningenieure, 4, Konstruktionsübungen, 6; Projektive Geometrie I, 3, Konstruktionsübungen, 2. — **Lackner**: Liniengeometrie, 2. — **Wieghardt**: Mechanik I: Mechanik der starren und flüssigen Körper, für Bauingenieure, 5, Übungen, 2. — **Jung**: Mechanik I: Mechanik der starren und flüssigen Körper für Maschineningenieure, 5, Übungen, 2. — **Kirsch**: Mechanik II: Elastizitäts- und Festigkeitslehre, mit Übungen, 5. — **Girtler**: Enzyklopädie der Mechanik, 5. — **Leon**: Ausgewählte Kapitel der Festigkeitslehre und Materialprüfung, $1^1/_2$; Analytische Mechanik des elastischen festen Körpers, $1^1/_2$. — **Pollack**: Elemente der niederen Geodäsie, 4. — **Dolezal**: Niedere Geodäsie, $7^1/_2$, Übungen für Bauingenieure, 5; Photographische Meßkunst: Photometrie, $1^1/_2$, Übungen, 2; Geodätisches Seminar, 2. — **Dokulil**: Übungen zur niederen Geodäsie für Geodäten, 5; Geodätisches Zeichnen: Situationszeichnen, 4; Technik des Katasterwesens, 2, Übungen, $2^1/_2$; Technische Terrainlehre, $1^1/_2$. — **Schumann**: Höhere Geodäsie, 2; Ausgewählte Kapitel aus höherer Geodäsie, 1; Übungen im Beobachten und Rechnen, 3. —

Angebote.

Gesucht

Techniker oder jüngerer Ingenieur

der **Elektrotechnik** zum sofortigen Eintritt. Bewerber mit Kenntnissen auf dem Gebiet der **drahtlosen Telegraphie** werden bevorzugt.

Signal Ges. m. b. H.

Kiel, Werk Ravensberg am Habsburgerring.

Assistent.

Zur Aushilfe für die Dauer des Krieges wird vom **Physikalischen Institut der Technischen Hochschule in Karlsruhe** ein Laboratoriums- und Verwaltungsassistent gesucht. Näheres durch die Direktion des Instituts.

Für die Redaktion verantwortlich i. V. Privatdozent Dr. Max Born in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Have other vols